GAVRIIL PĂLTINEANU PAVEL MATEI

ECUAȚII DIFERENȚIALE
ŞI
ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE
CU
APLICAȚII

Bucureşti
2007

Referent științific: prof. univ. dr. **ILEANA TOMA**
Universitatea Tehnică de Construcții București

PREFAȚĂ

Teoria ecuațiilor diferențiale şi a ecuațiilor cu derivate parțiale reprezintă un domeniu fundamental al matematicii cu numeroase aplicații în diferite domenii ale ştiinței şi tehnicii, precum: mecanică, astronomie, termodinamică, optică, elasticitate, chimie, biologie etc.

Necesitatea creării acestei teorii a început odată cu apariția calculului diferențial şi integral şi provine din faptul că numeroase fenomene şi procese din natură se modelează matematic prin ecuații diferențiale sau prin ecuații cu derivate parțiale.

Iată câteva dintre aceste procese: mişcarea unui punct material într-un câmp conservativ, vibrațiile unui sistem oscilant, căderea liberă a corpurilor, deplasarea unei membrane elastice sub acțiunea unei încărcări continue, propagarea căldurii într-o bară, dezintegrarea radioactivă, creşterea populației, diverse reacții chimice etc.

Primele contribuții notabile în teoria ecuațiilor diferențiale aparțin creatorilor analizei matematice Isaac Newton (1642-1727) şi G. M. Leibniz (1646-1716).

Pornind de la studiul problemelor de dinamică a punctului material, Newton a descoperit legea a doua a mecanicii: $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \dfrac{d\vec{v}}{dt}$, *relație care reprezintă o ecuație diferențială. Combinând această lege cu legea gravitației, el a calculat orbitele planetelor şi a unor comete.*

Leibniz a fost condus la studiul ecuațiilor diferențiale de o problemă de geometrie, aşa numita problemă inversă a tangentelor, care constă în determinarea unei curbe plecând de la unele proprietăți ale tangentei la curbă. Leibniz este cel care a introdus termenul de ecuație diferențială.

Lista matematicienilor care şi-au adus contribuția la dezvoltarea teoriei ecuațiilor diferențiale continuă cu frații Johann şi Daniel Bernoulli, Euler, Laplace, Lagrange, Cauchy, Fourier, Poincaré, Picard, Liapunov, Voltera etc.

L. Euler a dat o primă definiție clară a ecuației diferențiale, explicând şi în ce constă rezolvarea unei astfel de ecuații. După L. Euler, o ecuație diferențială este o relație între x, y şi $p = \frac{dy}{dx}$ *şi rezolvarea ei constă în găsirea unei relații între x şi y care nu-l mai conține pe p.*

Dintre numeroasele rezultate obținute de Euler în domeniul ecuațiilor diferențiale, amintim metoda de rezolvare a ecuațiilor diferențiale de ordinul n cu coeficienți constanți, cu numeroase aplicații în mecanică şi fizică.

Problema existenței şi unicității soluției unei ecuații diferențiale a fost formulată şi rezolvată pentru prima oară de Cauchy şi ulterior simplificată de Lipschitz. Metoda aproximațiilor succesive aparține lui Picard,iar forma sa abstractă lui Stefan Banach.

Lucrarea de față conține un minimum de cunoştințe de bază din domeniul ecuațiilor diferențiale şi al ecuațiilor cu derivate parțiale, care nu pot să lipsească din cultura matematică a unui inginer constructor.

Sunt prezentate următoarele capitole: Ecuații diferențiale, Sisteme de ecuații diferențiale, Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi, Serii Fourier, Ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea, Elemente de calcul variațional.

Am încercat să inițiem pe cititori în procesul de modelare a proceselor de evoluție prin ecuații diferențiale sau ecuații cu derivate parțiale, în studiul existenței şi unicității soluției unei asemenea ecuații, în însuşirea algoritmilor de calcul a soluției precum şi în interpretarea rezultatelor.

În cadrul fiecărui capitol sunt prezentate exemple rezolvate integral, care contribuie la o bună înțelegere a teoriei. Am fost preocupați tot timpul pentru a păstra un echilibru între rigoare şi accesibilitate.

Cartea se adresează în special studenților Universității Tehnice de Construcții Bucureşti, dar în egală măsură şi altor categorii de studenți din universități tehnice, precum şi unor specialişti din cercetare şi proiectare.

Mulțumim referentului ştiințific, doamna prof. univ. dr. Ileana Toma, pentru observațiile şi aprecierile făcute în urma citirii manuscrisului.

Autorii

CAPITOLUL 1

ECUAȚII DIFERENȚIALE

1.1. Noțiuni generale. Exemple. Teorema de existență şi unicitate

Prin *ecuație diferențială ordinară de ordinul n* se înțelege orice relație de forma:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1}$$

unde x este variabila independentă, $y = y(x)$ este funcția necunoscută, y', y'', ..., $y^{(n)}$ sunt derivatele funcției y şi F este o funcție reală continuă definită pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Dacă $F \in \mathscr{C}^{(1)}(\Omega)$ [1] şi derivata parțială $\dfrac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \neq 0$ pe Ω, atunci din teorema funcțiilor implicite rezultă că, local, ecuația (1) se poate pune sub forma

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Ecuația diferențială (2) se numeşte *forma normală* a ecuației (1).

Prin *soluție* a ecuației (1) [respectiv (2)] pe intervalul $I \subset \mathbb{R}$, se înțelege orice funcție $\varphi : I \to \mathbb{R}$, de clasă $\mathscr{C}^{(n)}(I)$ [2], care verifică ecuația

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) = 0, \ \forall x \in I$$

respectiv

$$\varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)), \ \forall x \in I.$$

Evident, se presupune că pentru orice $x \in I$, punctul $(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n)}(x)) \in \Omega$.

Graficul unei soluții a ecuației diferențiale (1) se mai numeşte şi *curbă integrală* a acestei ecuații diferențiale.

Cea mai simplă ecuație diferențială se întâlneşte la calculul integral şi constă în aflarea

---

[1] F este de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ pe Ω, dacă F şi derivatele sale parțiale de ordinul întâi sunt continue pe Ω.

[2] φ este de clasă $\mathscr{C}^{(n)}$ pe I, dacă φ şi derivatele sale φ', φ'',..., $\varphi^{(n)}$ sunt continue pe I.

primitivei unei funcții. Într-adevăr, fiind dată funcția continuă $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dacă notăm cu *y* primitiva sa, atunci obținem ecuația diferențială:

$$y' = f(x),\ x \in I. \tag{3}$$

Soluția ecuației diferențiale (3) este

$$y(x) = F(x) + C, \tag{4}$$

unde *F* este o primitivă a lui *f* pe *I*.

Constatăm că soluția căutată nu este unică, ci există o infinitate de soluții ale ecuației (3). Soluția (4) a ecuației (3), care depinde de o constantă arbitrară *C*, se numeşte soluția generală. Fiecare soluție particulară se obține din soluția generală dacă dăm constantei *C* o valoare numerică concretă.

Numeroase probleme din ştiință şi tehnică se modelează matematic prin ecuații diferențiale.

Exemplul 1.1.1. Să studiem căderea liberă a unui punct material, sub acțiunea forței gravitaționale. Alegem ca axă *Oy* dreapta verticală pe care se mişcă (cade) punctul; originea este la suprafața pământului, iar sensul pozitiv îl alegem în sus. Notăm cu *y(t)* coordonata punctului *M* la momentul *t*. Aşadar, variabila independentă este timpul *t*, iar funcția necunoscută este $y = y(t)$.

De la mecanică ştim că accelerația este $y''(t)$; pe de altă parte, se ştie că accelerația gravitațională este constantă, se notează cu *g* şi este aproximativ egală cu $9{,}81\ m/s^2$. Cum accelerația gravitațională este orientată în jos, în sistemul de coordonate ales, va avea semnul $-$. Egalând cele două accelerații ale punctului, obținem ecuația diferențială:

$$y''(t) = -g. \tag{5}$$

După prima integrare, obținem:

$$y'(t) = -gt + C_1, \tag{6}$$

iar după a doua integrare:

$$y(t) = g\frac{t^2}{2} + C_1\, t + C_2. \tag{7}$$

Expresia (7) reprezintă soluția generală a ecuației (5) şi conține două constante arbitrare C_1 şi C_2.

Din (6), pentru $t = 0$, deducem:

$C_1 = y'(0) = v_0$ - viteza inițială a punctului.

Procedând asemănător în (7), obținem:

$C_2 = y(0) = y_0$ - poziția inițială a punctului.

Cu aceste notații, obținem soluția particulară

$$y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_0 t + y_0 . \tag{8}$$

Aşadar, dacă cunoaştem poziția inițială y_0 a punctului şi viteza sa inițială v_0, din (8) putem calcula poziția punctului material în cădere liberă la fiecare moment *t*.

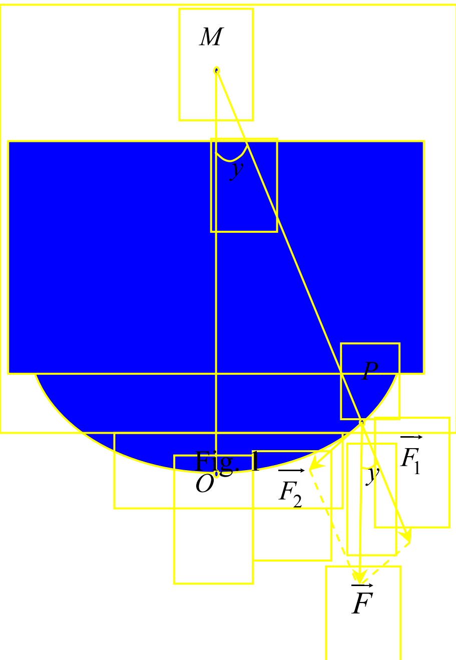
Exemplul 1.1.2. Se ştie că viteza de descompunere a radiului este direct proporțională cu cantitatea de radiu existentă. Să presupunem că în momentul $t=0$, avem R_0 grame de radiu. Să notăm cu $R(t)$ cantitatea (în grame) de radiu existentă (rămasă) la momentul $t>0$ şi cu *c* ($c>0$) coeficientul de proporționalitate. Suntem conduşi la ecuația diferențială

$$R'(t) = -cR(t) . \tag{9}$$

Se verifică, prin derivare, că soluția acestei ecuații diferențiale este

$$R(t) = R_0 e^{-ct} . \tag{10}$$

Exemplul 1.1.3. Să studiem oscilațiile mici ale unui pendul (fig. 1). Notăm cu *y(t)* unghiul format de pendul cu axa verticală la momentul *t*, cu *l* lungimea pendulului şi cu *g* accelerația gravitațională. Asupra punctului material *P* de masă *m* acționează forța gravitațională $\vec{F}$, de mărime $|\vec{F}| = mg$, care se descompune în componentele $\vec{F_1}$ şi $\vec{F_2}$, de mărimi $|\vec{F_1}| = mg\cos\varphi$ şi $|\vec{F_2}| = mg\sin\varphi$.



Presupunând firul inextensibil, acțiunea forței $\vec{F}$ se reduce la componenta $\vec{F_2}$. Observăm că $\vec{F_2}$ este orientată spre origine şi este tangentă la arcul de cerc $\overset{\frown}{OP}$. Lungimea arcului $\overset{\frown}{OP}$ este egală cu *ly(t)*, de unde deducem că accelerația unghiulară va fi $ly''(t)$. Din legea a doua a lui Newton, rezultă că:

$$ml \cdot y''(t) = -\left|\vec{F_2}\right| = -mg \sin y(t) .$$

Deoarece pentru oscilații mici (adică valori mici ale lui *y*), putem aproxima $\sin y \approx y$, mai departe obținem ecuația

$$y''(t) + \frac{g}{l} y(t) = 0 . \tag{11}$$

Se poate arăta că, soluția generală a acestei ecuații diferențiale este

$$y(t) = A\cos(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t + \varphi) , \tag{12}$$

unde A şi φ sunt nişte constante arbitrare.

Exemplul 1.1.4. Să analizăm mişcarea unui punct material de masă m care se deplasează pe axa *Ox* sub acțiunea unei forțe elastice $\vec{F}$ orientată spre origine. Dacă notăm cu *x(t)* distanța de la punctul material la origine, la momentul $t > 0$, atunci, din legea a doua a lui Newton, rezultă că:

$$m\ddot{x}(t) = F .$$

Pe de altă parte, F fiind o forță elastică, este de forma $F = -\omega^2 x(t)$. Obținem astfel ecuația diferențială a *oscilatorului armonic*:

$$m\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 . \tag{13}$$

Soluția generală este de forma

$$x(t) = A\cos(\omega\, t + \varphi) ,\ A \geq 0 ,$$

unde A şi φ sunt nişte constante arbitrare.

În ipoteza suplimentară a existenței unei forțe de frecare proporțională cu viteza, de forma $-k \cdot \dot{x}(t)$ şi a unei forțe exterioare *f(t)* aplicată punctului material, se obține o ecuație diferențială mai complicată şi anume:

$$m\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t) . \tag{14}$$

Exemplul 1.1.5. Să studiem geometria unei oglinzi care are proprietatea că reflectă razele luminoase provenite de la o sursă punctuală *O*, sub forma unui fascicol paralel cu o direcție dată.

Alegem punctul *O* ca origine a axelor de coordonate, axa *Ox* dreapta paralelă cu fascicolul şi dreapta *Oy* perpendiculară pe *Ox* (fig. 2). Fie $y = y(x)$, curba de intersecţie dintre corpul oglinzii şi planul *xOy*. Fie *P(x,y)* un punct de pe curbă, fie *T* punctul de intersecţie dintre tangenta în *P* la curbă şi axa *Ox* şi fie *PR* perpendiculara pe tangentă în punctul *P*. Cum *PQ* este paralelă cu *Ox* rezultă că $\sphericalangle QPT' = \sphericalangle OTP = \alpha$. Ţinând seama că unghiul de incidenţă ω_i este egal cu unghiul de reflexie ω_r, deducem că $\theta = \sphericalangle OPT = 90^0 - \omega_i = 90^0 - \omega_r = \alpha$, deci $\sphericalangle xOP = 2\alpha$. Aşadar, panta dreptei *OP* este $tg 2\alpha = \dfrac{y}{x}$. Pe de altă parte, panta dreptei *PT*, este $tg\alpha = y'(x)$. Cum $tg 2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$, rezultă ecuaţia diferenţială

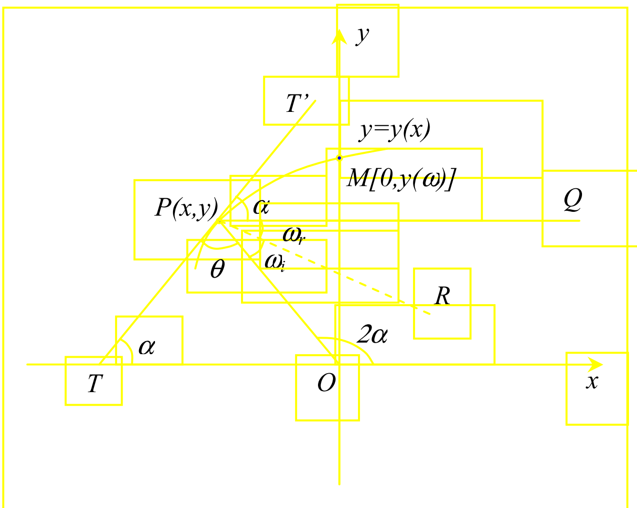


Fig. 2

$$\frac{2y'}{1 - y'^2} = \frac{y}{x},$$

care se mai scrie sub forma:

$$2x = y\left(\frac{1}{y'} - y'\right).$$

Derivând această ecuaţie în raport cu *y* şi ţinând seama că $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{y'}$, obţinem:

$$2 \cdot \frac{1}{y'} = \frac{1}{y'} - y' + y\left(-\frac{1}{y'^2} \cdot \frac{dy'}{dy} - \frac{dy'}{dy} \right)$$

şi mai departe

$$\frac{1}{y'} + y' = -\frac{dy'}{dy}\left(1 + \frac{1}{y'^2}\right)$$

sau

$$\frac{1 + y'^2}{y'} = -y \cdot \frac{dy'}{dy} \cdot \frac{1 + y'^2}{y'^2}.$$

Simplificând cu y' şi cu $1 + y'^2$, rezultă:

$$1 = -\frac{y}{y'}\frac{dy'}{dy},$$

deci

$$\frac{dy'}{y'} = \frac{dy}{y}. \tag{15}$$

După o primă integrare, obţinem

$$\ln|y'| = \ln|y| + \ln C_1,\ C_1 > 0,$$

sau $yy' = C_1$ respectiv $yy' = -C_1$. După încă o integrare, rezultă $\frac{y^2}{2} = C_1 x + C_2$, deci

$$y^2 = 2C_1 x + 2C_2. \tag{16}$$

Aşadar, am obţinut o familie de parabole.

Fie *M* punctul de intersecţie al curbei $y = y(x)$ cu axa *Oy*. Deoarece triunghiul *OMT* este dreptunghic isoscel, rezultă că $\alpha = 45^0$, deci $y'(0) = 1$. Dacă în (16) facem $x = 0$, obţinem

$$C_2 = \frac{y^2(0)}{2}. \tag{17}$$

Pe de altă parte, derivând (16), rezultă

$$yy' = C_1.$$

Cum $y'(0) = 1$, rezultă $y(0) = C_1$ şi mai departe $C_2 = \frac{C_1^2}{2}$. Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei (15) este

$$y^2 = 2C_1 x + C_1^2, \tag{18}$$

care reprezintă din punct de vedere geometric o familie de parabole simetrice faţă de axa *Ox*.

Focarul acestor parabole coincide cu originea *O* a axelor de coordonate. Dacă fixăm C_1 şi rotim parabola în jurul axei *Ox*, obţinem paraboloidul de rotaţie

$$y^2 + z^2 = 2C_1\left(x + \frac{C_1}{2}\right).$$

Aşadar, oglinda are forma unui paraboloid de rotaţie.

Aşa cum am văzut şi în exemplele prezentate, o ecuaţie diferenţială poate avea o infinitate de soluţii.

Fie ecuaţia diferenţială de ordinul întâi sub formă normală:

$$y' = f(x, y) \tag{19}$$

unde *f* este o funcţie continuă definită pe mulţimea deschisă $D \subset \mathbb{R}^2$.

Pentru a izola o anumită soluție a ecuației (19), se impune o condiție inițială şi anume: pentru $x = x_0$, soluția să ia valoarea y_0. Din punct de vedere geometric, aceasta revine la găsirea curbei integrale care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Definiția 1.1.1. Se numeşte *problema Cauchy* pentru ecuația diferențială (19) şi punctul $M_0(x_0, y_0) \in D$, problema care constă în determinarea unei soluții $y = \varphi(x)$, $x \in I$, a ecuației diferențiale (19), care verifică condiția inițială:

$$\varphi(x_0) = y_0. \tag{20}$$

Lema 1.1.1. *Rezolvarea problemei Cauchy* (19) - (20) *este echivalentă cu rezolvarea ecuației integrale*:

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, y(t)]\mathrm{d}t, \quad x \in I. \tag{21}$$

Demonstrație. Într-adevăr, dacă $y = \varphi(x)$, $x \in I$, este soluție pentru problema Cauchy (19) - (20), atunci

$$\varphi'(t) = f[t, \varphi(t)], \ \forall \ t \in I \ \text{ şi } \ \varphi(x_0) = y_0.$$

Integrând prima identitate, obținem:

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} \varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]\mathrm{d}t, \ \forall x \in I.$$

Cum $\varphi(x_0) = y_0$, rezultă că $\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]\mathrm{d}t$, $\forall \ x \in I$, deci $y = \varphi(x)$, $x \in I$, este soluție pentru ecuația integrală (21).

Reciproc, dacă $y = \varphi(x)$, $x \in I$, este soluție pentru ecuația integrală (21), atunci

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f[t, \varphi(t)]\mathrm{d}t, \ \forall \ x \in I.$$

Evident $\varphi(x_0) = y_0$. Pe de altă parte, prin derivare obținem:

$$\varphi'(x) = f[x, \varphi(x)], \ \forall \ x \in I,$$

deci $y = \varphi(x)$, $x \in I$, este soluție pentru problema Cauchy (19) - (20). ■

Definiția 1.1.2. O funcție $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se numeşte *lipschitziană în raport cu y, în domeniul D*, dacă există o constantă $L \geq 0$ astfel încât $\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \leq L\left|y_1 - y_2\right|$, oricare ar fi punctele (x, y_1) şi (x, y_2) din *D*.

Observația 1.1.2. Dacă mulțimea $D \subset \mathbb{R}^2$ este deschisă şi convexă, $f \in \mathscr{C}^{(1)}(D)$ şi $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ este mărginită pe *D*, atunci *f* este lipschitziană în raport cu *y* pe *D*.

Într-adevăr, fie $M > 0$ astfel încât

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| < M, \ \forall \ (x, y) \in D.$$

Din teorema lui Lagrange, rezultă:

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, \xi)(y_1 - y_2),$$

unde (x, ξ) este un punct interior pe segmentul de dreaptă inclus în *D*, de capete (x, y_1) şi (x, y_2). Aşadar, avem:

$$\left|f(x, y_1) - f(x, y_2)\right| \leq M\left|y_1 - y_2\right|, \ \forall \ (x, y_1) \text{ şi } (x, y_2) \text{ din } D,$$

deci *f* este lipschitziană pe *D*.

Teorema 1.1.1. (Teorema de existență şi unicitate)

Fie f o funcție reală continuă, definită pe dreptunghiul $\overline{D} = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$, $a > 0$, $b > 0$. *Dacă f este lipschitziană în raport cu y, pe* $\overline{D}$, *atunci există o soluție unică* $y = \varphi(x)$, $x \in I \subset (x_0 - a, x_0 + a)$, *pentru problema Cauchy*

$$y' = f(x, y), \ (x, y) \in D,$$

$$y(x_0) = y_0.$$

Demonstrație. Pentru început, vom arăta că există o soluție a problemei Cauchy. Conform Lemei 1.1.1, aceasta revine la a arăta că există o soluție a ecuației integrale (21). Demonstrația se bazează pe *metoda aproximațiilor succesive a lui Picard*, care nu numai că stabileşte existența soluției, dar ne dă şi un procedeu de construcție (aproximativ) a acestei soluții. Cum *f* este continuă pe mulțimea compactă $\overline{D}$, rezultă că *f* este mărginită pe $\overline{D}$. Fie

$M>0$ astfel încât $|f(x,y)|<M$, $\forall\ (x,y)\in\overline{D}$. Dacă notăm cu L constanta lui Lipschitz pe $\overline{D}$, atunci, pentru orice două puncte (x,y_1) şi (x,y_2) din $\overline{D}$, avem:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le M|y_1-y_2|. \tag{22}$$

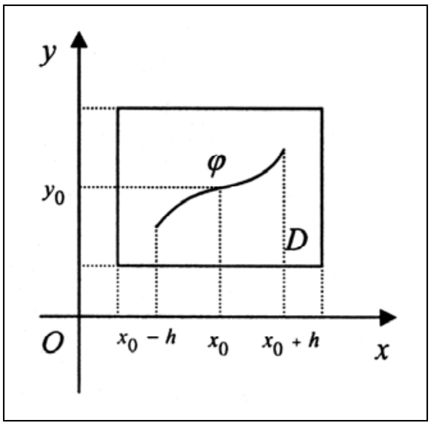


Fig. 3

Fixăm un număr $\alpha\in(0,1)$, notăm cu $h=\min\left\{a,\frac{b}{M},\frac{\alpha}{L}\right\}$ şi cu I intervalul $[x_0-h,x_0+h]$. Evident, $I\subset(x_0-a,x_0+a)$.

Definim prima aproximație $y_1=y_1(x)$, $x\in I$, astfel:

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_0)dt,\ x\in I.$$

Deoarece f este continuă, rezultă că y_1 este continuă pe I. Pe de altă parte, pentru orice $x\in I$, avem

$$|y_1(x)-y_0|\le\left|\int_{x_0}^{x}|f(t,y_0))|dt\right|\le M\left|\int_{x_0}^{x}dt\right|=M|x-x_0|\le Mh\le M\cdot\frac{b}{M}=b.$$

Aşadar, $y_1:I\to[y_0-b,y_0+b]$, deci $(t,y_1(t))\in\overline{D}$, $\forall t\in I$.

Construim aproximația a doua $y_2=y_2(x)$ astfel:

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_1(t))dt,\ x\in I.$$

Din continuitatea funcțiilor *f* şi y_1, rezultă continuitatea lui y_2. Observăm că

$$|y_2(x)-y_0|\le\left|\int_{x_0}^{x}|f(t,y_1(t)))|dt\right|\le M|x-x_0|\le Mh\le b,$$

deci

$$y_2(x)\in[y_0-b,y_0+b],\ \forall x\in I$$

sau $(t,y_2(t))\in\overline{D}$, $\forall x\in I$.

În general, definim aproximația de ordinul *n*, astfel:

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,y_{n-1}(t))dt,\ x\in I \tag{23}$$

şi constatăm că y_n este o funcție continuă pe I cu valori în intervalul $[y_0-b, y_0+b]$, deci $(t, y_2(t)) \in \overline{D}$, $\forall x \in I$.

Procedeul continuă nedefinit.

Şirul de funcții $y_n : I \to [y_0-b, y_0+b]$, $n \in \mathbb{N}^*$, definit prin formula (23), poartă numele de *şirul aproximațiilor succesive*.

Considerăm următoarea serie de funcții pe *I*:

$$y_0 + (y_1 - y_0) + \ldots + (y_n - y_{n-1}) + \ldots \tag{24}$$

şi observăm că şirul sumelor sale parțiale $(s_n)_n$ este chiar $(y_n)_n$,

$$s_n(x) = y_n(x),\ \forall x \in I.$$

Dacă vom arăta că seria (24) este uniform convergentă pe *I*, va rezulta că şirul $(y_n)_n$ este uniform convergent pe *I*. Folosind ipoteza că funcția *f* este lipschitziană pe $\overline{D}$ în raport cu *y*, avem:

$$|\,y_2(x) - y_1(x)\,| = \left|\int_{x_0}^{x} \left|f\left(t, y_1(t)\right) - f\left(t, y_0(t)\right)\right| dt\right| \le L \left|\int_{x_0}^{x} |\,y_1(t) - y_0\,|\, dt\right| \le$$

$$\le LM \left|\int_{x_0}^{x} |t - x_0|\, dt\right| = LM \frac{|x - x_0|^2}{2} \le \frac{LM}{2!} h^2 .$$

Aşadar, avem:

$$|y_2(x) - y_1(x)| \le \frac{LM}{2!} |x - x_0|^2,\ \forall x \in I. \tag{25}$$

Folosind din nou faptul că *f* este lipschitziană şi ținând seama de (25), rezultă:

$$|\,y_3(x) - y_2(x)\,| = \left|\int_{x_0}^{x} \left|f\left(t, y_2(t)\right) - f\left(t, y_1(t)\right)\right| dt\right| \le L \left|\int_{x_0}^{x} |\,y_2(t) - y_1(t)\,|\, dt\right| \le$$

$$\le \frac{L^2 M}{2!} \left|\int_{x_0}^{x} |t - x_0|^2\, dt\right| = \frac{L^2 M}{3.2!} |x - x_0|^3 ,$$

deci:

$$|y_3(x) - y_2(x)| \le \frac{L^2 M}{3!} |x - x_0|^3,\ \forall x \in I. \tag{26}$$

În general, avem:

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \le \frac{L^{n-1} M}{n!} |x - x_0|^n \le \frac{L^{n-1} M}{n!} h^n,\ \forall x \in I. \tag{27}$$

Observăm că seria numerică $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M \cdot L^{n-1}}{n!} h^n$ este convergentă, aşa cum rezultă din criteriul raportului:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{M \cdot L^n}{(n+1)!} h^{n+1} \cdot \frac{n!}{M \cdot L^{n-1} h^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{Lh}{n+1} = 0 < 1.$$

Conform (27), seria de funcții (24) este majorată pe intervalul I de o serie numerică convergentă, deci seria (24) este uniform convergentă pe I, conform criteriului lui Weierstrass.

Aşadar, am demonstrat că şirul aproximațiilor succesive (23) este uniform convergent pe intervalul I. Notăm cu φ limita acestui şir. Cum $y_n \xrightarrow[I]{u} \varphi$ şi y_n sunt funcții continue pe I, rezultă că φ este, de asemenea, continuă pe I.

Pe de altă parte, avem:

$$\left| \int_{x_0}^{x} \left| f(t, y_{n-1}(t)) - f(t, \varphi(t)) \right| dt \right| \le L \left| \int_{x_0}^{x} | y_{n-1}(t) - \varphi(t) | dt \right| \le$$

$$\le L \cdot \|y_n - \varphi\|_\infty \cdot |x - x_0| \le Lh \cdot \|y_n - \varphi\|_\infty, \tag{28}$$

unde am notat cu

$$\|y_n - \varphi\|_\infty = \sup\{|y_{n-1}(x) - \varphi(x)|; x \in I\}.$$

Faptul că $y_n \xrightarrow[I]{u} \varphi$ revine la a spune că

$$\lim_{n\to\infty} \|y_n - \varphi\|_\infty = 0.$$

Din această observație şi din (28) deducem că

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t)) dt = \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) dt, \ \forall x \in I.$$

În sfârşit, trecând la limită în (23), obținem:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi(t)) dt, \ \forall x \in I,$$

deci φ este soluție pentru ecuația integrală (21) şi cu aceasta am dovedit existența soluției problemei Cauchy.

Pentru a demonstra unicitatea acestei soluții, să presupunem ar mai exista o soluție ψ astfel incât

$$\psi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\psi(t))dt\,,\ \forall x\in I\,.$$

În continuare, pentru orice $x\in I$, avem:

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \le \left|\int_{x_0}^{x} \left|f(t,\varphi(t)) - f(t,\psi(t))\right| dt\right| \le$$

$$\le L\left|\int_{x_0}^{x} |\varphi(t)-\psi(t)|\,dt\right| \le L\|\varphi-\psi\|_\infty \cdot h\,.$$

Ținând seama de definiția lui *h*, deducem

$$\|\varphi-\psi\|_\infty = \sup\{|\varphi(x)-\psi(x)|; x\in I\} \le L\|\varphi-\psi\|_\infty \cdot \frac{\alpha}{L} = \alpha\cdot\|\varphi-\psi\|_\infty\,.$$

Cum $\alpha\in(0,1)$, această inegalitate nu este posibilă decât dacă $\|\varphi-\psi\|_\infty = 0$, deci dacă $\varphi\equiv\psi$ şi cu aceasta unicitatea este dovedită. ■

Exemplul 1.1.6. Să se rezolve problema Cauchy

$$y' = y\,,\ (x,y)\in D = \left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\times\left[\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right],$$

$$y(0)=1\,.$$

Avem $f(x,y)=y$, $(x,y)\in D$, $x_0=0$, $y_0=1$, $a=b=\frac{1}{2}$, $M=\frac{3}{2}$ şi $L = 1$.

Dacă alegem $\alpha=\frac{1}{2}$, atunci $h=\min\left(\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{3}$, deci $I=\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$.

Şirul aproximațiilor succesive arată astfel:

$$y_1(x) = 1+\int_0^x 1\mathrm{d}t = 1+x\,,$$

$$y_2(x) = 1+\int_0^x (1+t)\mathrm{d}t = 1+x+\frac{x^2}{2}\,,$$

$$y_3(x) = 1+\int_0^x \left(1+t+\frac{t^2}{2}\right)\mathrm{d}t = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\,,$$

....

$$y_n(x) = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\,,\ x\in I\,,$$

....

Cum $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, convergența seriei este uniformă și $(y_n)_n$ este șirul sumelor parțiale ale seriei, rezultă că $y_n \xrightarrow[I]{u} \varphi$, unde $\varphi(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Observația 1.1.2. În exemplul precedent am putut afla limita șirului aproximațiilor succesive. De regulă, acest lucru nu este posibil și de aceea se aproximează limita acestui șir cu aproximația de ordinul *n*, adică cu funcția y_n definită în (23).

Exemplul 1.1.7. Să se rezolve problema Cauchy

$$y' = x^2 + y^2,\ (x,y) \in D = (-1,1) \times (-1,1),$$

$$y(0) = 0.$$

Avem $a = b = 1$, $x_0 = y_0 = 0$, $M = 2$. Dacă alegem $\alpha = \frac{1}{2}$, atunci $h = \min\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$, deci $I = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Șirul aproximațiilor succesive arată astfel:

$$y_1(x) = \int_0^x t^2\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9}\right)\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63}\right)^2\right]\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535},\ x \in I, \ldots$$

Putem aproxima soluția problemei Cauchy cu y_3, deci

$$\varphi(x) \approx \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535},\ x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].$$

În continuare, vom evalua eroarea care se face în metoda aproximațiilor succesive.

Teorema 1.1.2. *În condițiile și cu notațiile Teoremei 1.1.1, avem:*

$$|\varphi(x) - y_n(x)| \le \frac{M \cdot L^n h^{n+1}}{(n+1)!} e^{Lh},\ \forall x \in I,$$

unde φ *este soluția exactă a problemei Cauchy, iar* y_n *este aproximanta de ordinul n.*

Demonstrație. Din (27) deducem:

$$\left|y_{n+p}(x)-y_n(x)\right|=\left|(y_n-y_{n+1})+(y_{n+1}-y_{n+2})+\ldots+(y_{n+p-1}-y_{n+p})\right|\le$$

$$\le\frac{ML^nh^{n+1}}{(n+1)!}+\frac{ML^{n+1}h^{n+2}}{(n+2)!}+\ldots+\frac{ML^{n+p-1}h^{n+p}}{(n+p)!}=$$

$$=\frac{ML^nh^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\frac{Lh}{n+2}+\frac{(Lh)^2}{(n+2)(n+3)}+\ldots+\frac{(Lh)^{p-1}}{(n+2)\ldots(n+p)}\right)<$$

$$=\frac{ML^nh^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\frac{Lh}{1!}+\frac{(Lh)^2}{2!}+\ldots+\frac{(Lh)^{p-1}}{(p-1)!}+\frac{(Lh)^p}{p!}\right).$$

Aşadar, avem:

$$\left|y_{n+p}(x)-y_n(x)\right|<\frac{ML^nh^{n+1}}{(n+1)!}\left(1+\frac{Lh}{1!}+\frac{(Lh)^2}{2!}+\ldots+\frac{(Lh)^{p-1}}{(p-1)!}+\frac{(Lh)^p}{p!}\right),\ \forall x\in I.$$

Trecând la limită după p ($p\to\infty$) în ultima inegalitate, obținem:

$$\left|\varphi(x)-y_n(x)\right|\le\frac{M\cdot L^nh^{n+1}}{(n+1)!}e^{Lh},\ \forall x\in I.\ ■$$

Definiția 1.1.3. Fie ecuația diferențială

$$y'=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega\subset\mathbb{R}^2. \tag{29}$$

Presupunem, în plus, că în domeniul Ω sunt îndeplinite condițiile teoremei de existență şi unicitate. Prin *soluție generală* a ecuației diferențiale (29) în domeniul Ω, se înțelege o familie de soluții $y=\varphi(x,C)$, $x\in I$, unde C este o constantă arbitrară, cu proprietățile:

a) $(x,\varphi(x,C))\in\Omega$, $\forall x\in I$, $\forall C$;

b) $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=f[x,\varphi(x,C)]$, $\forall x\in I$, $\forall C$;

c) Pentru orice punct $(x_0,y_0)\in\Omega$, există o constantă C_0 unică astfel încât

$$\varphi(x_0,C_0)=y_0.$$

Exemplul 1.1.8. Soluția generală a ecuației diferențiale $y'=1$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, este $y=x+C$, $x\in\mathbb{R}$, unde C este o constantă reală oarecare. Într-adevăr, în acest caz, $f(x,y)=1$, $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ şi este evident că sunt îndeplinite condițiile de existență şi unicitate

din Teorema 1.1.1. Pe de altă parte, avem $(x+C)'=1$ şi $\forall(x_0, y_0)\in\mathbb{R}^2$ există o constantă unică $C_0 = y_0 - x_0$ astfel încât $y_0 = x_0 + C_0$.

Definiția 1.1.4. Prin *soluție particulară* a ecuației diferențiale (29) se înțelege o soluție a sa obținută din soluția generală a ecuației (29), prin particularizarea constantei *C*.

În exemplul 1.1.8, pentru $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, $C_3 = -1$ etc, obținem soluțiile particulare $y_1 = x$, $y_2 = x+1$, $y_3 = x-1$ etc.

Observația 1.1.3. Teorema 1.1.1 are un caracter local, în sensul că, dacă într-o vecinătate a punctului $M(x_0, y_0)$, funcția *f* este continuă şi lipschitziană în raport cu *y* (în particular, are derivata parțială în raport cu *y* mărginită), atunci problema Cauchy admite o singură soluție a cărei curbă integrală trece prin punctul *M*.

Observația 1.1.4. De regulă, soluția generală nu se obține sub formă explicită din Definiția 1.1.3, ci trebuie gândită ca soluția implicită $y=\varphi(x,C)$, definită de ecuația $\Phi(x,y,C)=0$ obținută prin integrarea ecuației diferențiale (29). Ecuația $\Phi(x,y,C)=0$ se mai numeşte şi *integrala generală* (sau *completă*) a ecuației diferențiale (29). Ecuația $\Phi(x,y,C_0)=0$, obținută prin particularizarea constantei *C*, se mai numeşte şi *integrală particulară*.

Definiția 1.1.5. Se numeşte *soluție singulară* a unei ecuații diferențiale, o soluție a acestei ecuații care are proprietatea că, în orice punct al curbei sale integrale, nu sunt satisfăcute condițiile de unicitate.

Aceasta revine la a spune că pentru orice punct (x_0, y_0) al curbei integrale a acestei soluții, există o altă soluție a ecuației diferențiale, a cărei curbă integrală trece prin acest punct şi este diferită de aceasta. Din Definiția 1.1.5 deducem că soluțiile singulare se caută în punctele unde nu sunt satisfăcute condițiile Teoremei 1.1.1. Dacă *f* este continuă, atunci

soluțiile singulare trebuie căutate în punctele unde f nu este lipschitziană, de exemplu, în punctele unde $\frac{\partial f}{\partial y}$ nu este mărginită.

Exemplul 1.1.9. Fie ecuația diferențială

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}},\ (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{30}$$

Avem $f(x,y) = 3y^{\frac{2}{3}}$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Evident, f este continuă pe $\mathbb{R}^2$. Cum $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y^{-\frac{1}{3}}$, rezultă că $\frac{\partial f}{\partial y}$ nu este mărginit pe axa Ox ($y = 0$). Pe de altă parte, este evident că $y = 0$ este o soluție a ecuației (30). Aşadar, $y = 0$ este o soluție singulară a ecuației (30).

Fie $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0); x \in \mathbb{R}\}$. Soluția generală a ecuației (30) în Ω este $y = (x + C)^3$, cum se verifică imediat. Fie $(a,0)$ un punct oarecare de pe axa Ox.

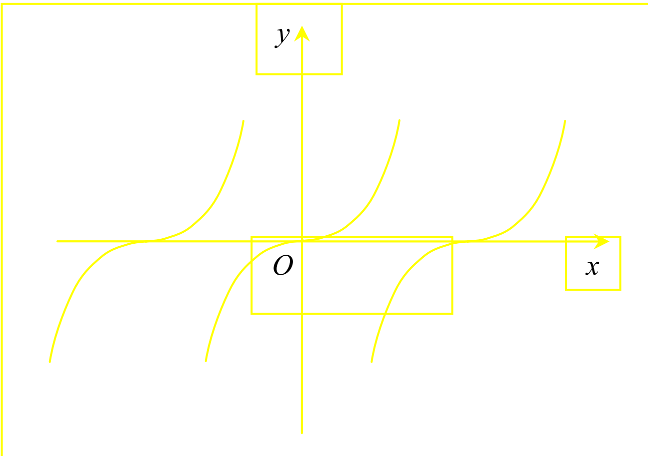


Fig. 4

Prin acest punct trece soluția singulară $y = 0$ şi soluția particulară $y = (x - a)^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Din punct de vedere geometric, curba integrală a soluției singulare este înfăşurătoarea familiei de curbe integrale ale soluției generale.

1.2. Ecuații diferențiale de ordinul întâi de forme particulare

1.2.1. Ecuații diferențiale cu variabile separabile

O ecuație diferențială cu variabile separabile este o ecuație de forma:

$$f_1(x) \cdot g_1(y) \cdot y' + f_2(x) \cdot g_2(y) = 0 \,, \tag{1}$$

unde $f_1, f_2 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue, $f_1 \neq 0$ pe I, iar $g_1, g_2 : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sunt funcții continue, $g_2 \neq 0$ pe J, I şi J fiind intervale. Împărțind cu $f_1(x) \cdot g_2(y)$, *se separă variabilele* şi ecuația devine:

$$\frac{g_1(y)}{g_2(y)}\, dy = -\frac{f_2(x)}{f_1(x)}\, dx . \tag{2}$$

Integrând în ambii membri, obținem:

$$\int \frac{g_1(y)}{g_2(y)} dy = -\int \frac{f_2(x)}{f_1(x)} dx + C\,,\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Se obține astfel *soluția generală sub formă implicită* a ecuației diferențiale. Explicitând în raport cu y (dacă este posibil), se obține o expresie de forma $y = h(x, C)$, $C \in \mathbb{R}$, care este *soluția generală sub formă explicită* a ecuației diferențiale (1).

Exemplul 1.2.1. Să se găsească soluția ecuației diferențiale

$$\left(1+x^2\right) y y' + x\left(1+y^2\right) = 0\,,$$

care îndeplineşte condiția inițială $y(1) = 2$.

Ecuația se pune sub forma echivalentă $\frac{y}{1+y^2} dy = -\frac{x}{1+x^2} dx$. Integrând, obținem:

$$\int \frac{y}{1+y^2} dy = -\int \frac{x}{1+x^2} dx\,,$$

deci

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+y^2\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + \frac{1}{2}\ln C\,,\ C > 0\,,$$

sau

$$1 + y^2 = \frac{C}{1+x^2}\,,\ \ C > 0\,.$$

Din condiția inițială $y(1) = 2$, obținem $C = 10$ şi mai departe $y = \pm\sqrt{\frac{9-x^2}{1+x^2}}$. Evident, soluția căutată este

$$y = \sqrt{\frac{9-x^2}{1+x^2}}\,,\ x \in (-3{,}3).$$

Exemplul 1.2.2. Să se găsească soluția generală a ecuației diferențiale $xy' = y$, $x > 0$, $y > 0$.

Se observă că ecuația diferențială dată se poate scrie sub forma echivalentă:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}.$$

Integrând în ambii membri, se obține:

$$\ln y = \ln x + \ln C, \; C \in \mathbb{R}_+^*$$

sau $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}_+^*$.

Observăm că, deşi calculele sunt făcute în domeniul $D = (0,\infty) \times (0,\infty)$, funcția $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$, verifică ecuația diferențială pe $\mathbb{R}^2$. Aşadar, soluția generală a ecuației diferențiale date, este $y = Cx$, $C \in \mathbb{R}$.

1.2.2. Ecuații diferențiale omogene

Sunt ecuații diferențiale de forma

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{3}$$

unde *f* este o funcție continuă pe un interval *I*, $0 \notin I$.

Dacă notăm cu $u = \frac{y}{x}$ şi considerăm $u = u(x)$ noua funcție necunoscută, rezultă $y(x) = xu(x)$ şi $y' = u + x \cdot u'$. În urma acestei schimbări de funcție necunoscută, ecuația (3) devine o ecuație cu variabile separabile, anume:

$$u + x \cdot u' = f(u).$$

Cazul $f(u) = u$ se reduce la o ecuație cu variabile separabile şi se rezolvă ca mai sus. Putem deci presupune că $f(u) \neq u$. Separând variabilele obținem:

$$\frac{du}{f(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

şi mai departe

$$\int \frac{du}{f(u) - u} = \ln|x| + \ln|C|, \; C \in \mathbb{R}^*.$$

Exemplul 1.2.3. Să se găsească soluția ecuației diferențiale

$$y' = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \ x \neq 0,$$

care îndeplineşte condiția inițială $y(2) = 1$.

Notând cu $u = \frac{y}{x}$, obținem $u + xu' = u + u^2$ sau $xu' = u^2$. Presupunem, în continuare, $y \neq 0$. Ecuația diferențială $xu' = u^2$ se scrie sub forma $\frac{du}{u^2} = \frac{dx}{x}$. Integrând, rezultă

$$-\frac{1}{u} = \ln|x| + \ln|C|, \ C \in \mathbb{R}^*.$$

şi mai departe $-\frac{x}{y} = \ln|C||x|$, $x \neq 0$. Din această relație se obțin soluțiile corespunzătoare diferitelor condiții inițiale. Impunând condiția $y(2) = 1$, se obține $|C| = \frac{1}{2e^2}$, care conduce la $-\frac{x}{y} = -2 - \ln 2 + \ln|x|$, $x \neq 0$. Deoarece ne interesează cazul $x \in (0, \infty)$, rezultă că soluția care îndeplineşte condiția inițială $y(2) = 1$ este $y = \frac{x}{2 + \ln 2 - \ln x}$, $x \in \left(0, 2e^2\right)$.

1.2.3. Ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi

Ecuațiile diferențiale liniare neomogene, de ordinul întâi, sunt ecuații de forma:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{4}$$

unde P şi Q sunt funcții continue pe un interval I.

Ecuația liniară omogenă asociată este

$$y' + P(x)y = 0. \tag{5}$$

Observăm că ecuația omogenă (5) este o ecuație cu variabile separabile. Separând variabilele şi integrând, obținem:

$$\frac{dy}{y} = -P(x)dx, \quad y \neq 0,$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C|, \ C \in \mathbb{R}^*$$

şi mai departe

$$|y| = |C| e^{-\int P(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}^*,$$

care este echivalentă cu

$$y = C e^{-\int P(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}^*.$$

Deşi această soluție s-a obținut în ipoteza $y \neq 0$, care presupune $C \neq 0$, observăm că ecuația (5) admite şi soluția $y = 0$ care s-a pierdut la împărțirea cu y. Aşadar

$$y = C e^{-\int P(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

reprezintă *soluția generală a ecuației omogene* (5).

Pentru a obține soluția generală a ecuației neomogene (4) folosim *metoda variației constantei a lui Lagrange* şi anume: căutăm soluția ecuației neomogene (4) de forma

$$y = \varphi(x) e^{-\int P(x)dx}, \tag{7}$$

unde φ este o funcție de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ pe intervalul I. Pentru determinarea funcției φ punem condiția ca (7) să fie soluție pentru ecuația (4) şi obținem:

$$\varphi'(x) e^{-\int P(x)dx} - \varphi(x)P(x) e^{-\int P(x)dx} + P(x)\varphi(x) e^{-\int P(x)dx} = Q(x).$$

Efectuând calculele, rezultă

$$\varphi'(x) = Q(x) e^{\int P(x)dx}$$

şi mai departe

$$\varphi(x) = \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C.$$

Înlocuind în (7) obținem *soluția generală a ecuației neomogene* (4) şi anume:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(C + \int Q(x) e^{\int P(x)dx} dx\right) \tag{8}$$

Exemplul 1.2.4. Să se găsească soluția generală a ecuației diferențiale

$$y' + y \sin x = -\sin x \cos x.$$

Folosim formula (8) cu $P(x) = \sin x$ şi $Q(x) = -\sin x \cos x$. Înlocuind în (8), obținem:

$$y = e^{\cos x}\left(C - \int \sin x \cos x e^{-\cos x} dx\right) = e^{\cos x}\left(C - e^{-\cos x}\cos x - e^{-\cos x}\right),$$

deci $y = C e^{\cos x} - \cos x - 1$.

1.2.4. Ecuații diferențiale de tip Bernoulli

Sunt ecuații diferențiale de forma:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}. \tag{9}$$

Presupunem că P şi Q sunt funcții continue pe un interval I. Împărțind cu y^{α}, pentru $y \neq 0$, obținem:

$$y^{-\alpha} y' + P(x) y^{1-\alpha} = Q(x).$$

Dacă facem schimbarea de funcție $y^{1-\alpha} = z$, unde $z = z(x)$ este noua funcție necunoscută, rezultă $(1-\alpha) y^{-\alpha} \cdot y' = z'$ şi mai departe

$$\frac{z'}{1-\alpha} + P(x)z = Q(x). \tag{10}$$

Ecuația diferențială (10) este o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi şi se rezolvă ca în secțiunea 1.2.3.

Exemplul 1.2.5. Să se găsească soluția generală a ecuației diferențiale

$$y' - \frac{y}{3x} = \frac{1}{3} y^4 \ln x, \ x \in (0,\infty).$$

Împărțind cu y^4, pentru $y \neq 0$, rezultă $y^{-4} \cdot y' - \frac{1}{3x} y^{-3} = \frac{1}{3} \ln x$. Dacă notăm cu $z = y^{-3}$, atunci $z' = -3y^{-4} y'$ şi ecuația devine:

$$z' + \frac{1}{x} z = -\ln x.$$

Aceasta este o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi, cu $P(x) = \frac{1}{x}$ şi $Q(x) = -\ln x$.

Folosind formula (8) obținem:

$$z = e^{-\ln x}\left(C - \int \ln x\, e^{\ln x} dx\right) = \frac{1}{x}\left(C - \int x \ln x\, dx\right)$$

şi mai departe $z = \frac{C}{x} + \frac{x}{4} - \frac{x}{2} \cdot \ln x$. Aşadar avem: $y^{-3} = \frac{C}{x} + \frac{x}{4} - \frac{x}{2} \cdot \ln x$, $x > 0$, $y \neq 0$.

Diferite soluții particulare se obțin precizând condițiile inițiale.

1.2.5. Ecuații diferențiale de tip Riccati

Sunt ecuații diferențiale de forma

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x) \tag{11}$$

unde P, Q şi R sunt funcții continue pe un interval I.

În general, o ecuație de acest tip nu se poate integra prin cuadraturi. Astfel, încă din 1841, J. Liouville a demonstrat că există ecuații diferențiale de tip Riccati care nu sunt *„integrabile prin cuadraturi"*, adică soluțiile lor nu pot fi exprimate ca primitive ale unor funcții continue. De exemplu, ecuația Riccati foarte simplă:

$$y' = x^2 + y^2,$$

nu este integrabilă prin cuadraturi.

Cel mai simplu şi mai cunoscut caz de integrabilitate a ecuației Riccati este acela când se cunoaşte o soluție particulară a acestei ecuații. Dacă se cunoaşte o soluție particulară a ecuației diferențiale (11), anume $y_p : J \subset I \to \mathbb{R}$, atunci efectuând schimbarea de funcție $y = y_p + \frac{1}{z}$, ecuația diferențială se reduce la o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi.

Într-adevăr, derivând şi înlocuind în ecuația (11) obținem:

$$y_p' - \frac{z'}{z^2} = P(x)\left(y_p^2 + 2\frac{y_p}{z} + \frac{1}{z^2}\right) + Q(x)\left(y_p + \frac{1}{z}\right) + R(x).$$

Ținând seama că y_p verifică ecuația (11), deci că

$$y_p' = P(x) \cdot y_p^2 + Q(x) \cdot y_p + R(x),$$

rezultă

$$z' + \left[2y_p P(x) + Q(x)\right]z = -P(x). \tag{12}$$

Se observă că ecuația diferențială (12) este o ecuație diferențială liniară de ordinul întâi.

Observația 1.2.2. Se poate arăta că, orice ecuație diferențială de tip Riccati de forma

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2},$$

unde $A, B, C \in \mathbb{R}$ satisfac condiția $(B+1)^2 - 4AC \geq 0$, admite o soluție particulară de forma

$$y_p(x) = \frac{c}{x},\ c \in \mathbb{R}.$$

Exemplul 1.2.6. Să se integreze următoarea ecuație diferențială de tip Riccati:

$$y' = -\frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3x^2}\,,\ x \in (0,\infty).$$

Ținând seama de observația 1.2.2, se constată că $y = \frac{1}{x}$ este o relație particulară a ecuației date. Facem schimbarea de funcție $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ şi obținem:

$$-\frac{1}{x^2} - \frac{z'}{z^2} = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x^2} + \frac{2}{xz} + \frac{1}{z^2}\right) - \frac{2}{3x^2}.$$

Rezultă următoarea ecuație diferențială liniară de ordinul întâi:

$$z' - \frac{2}{3x}z = \frac{1}{3},$$

a cărei soluție generală este $z = Cx^{\frac{2}{3}} + x$.

Soluția generală a ecuației Riccati este:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{Cx^{2/3} + x},\ x \in (0,\infty).$$

1.2.6. Ecuații diferențiale de tip Clairaut

Sunt ecuații diferențiale de forma:

$$y = xy' + \varphi(y'), \tag{13}$$

unde φ este o funcție de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ pe un interval J.

Notând $y' = p$ ecuația devine $y = x \cdot p + \varphi(p)$.

Derivând în raport cu x obținem: $p = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx}$, deci

$$[x + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0.$$

Dacă $\frac{dp}{dx} = 0$, rezultă $p = C$ şi mai departe

$$y = Cx + \varphi(C). \tag{14}$$

Familia de soluții (14) reprezintă *soluția generală* a ecuației (13). Din punct de vedere geometric, curbele integrale corespunzătoare acestei soluții sunt drepte.

Pe de altă parte, din $x + \varphi'(p) = 0$, obținem *soluția singulară* (sub *formă parametrică*):

$$\begin{cases} x = -\varphi'(p) \\ y = -p\varphi'(p) + \varphi(p) \end{cases}. \tag{15}$$

Curba integrală corespunzătoare soluției singulare (15) este înfăşurătoarea familiei de drepte (14).

Exemplul 1.2.7. Să se integreze ecuația diferențială de tip Clairaut

$$y = xy' - \frac{y'^2}{2}.$$

Soluția generală este $y = Cx - \frac{C^2}{2}$, $C \in \mathbb{R}$.

Soluția singulară sub formă parametrică este:

$$\begin{cases} x = p \\ y = \dfrac{p^2}{2} \end{cases}.$$

Eliminând pe p între cele două ecuații parametrice, obținem $y = \frac{x^2}{2}$, adică o parabolă, care este înfăşurătoarea familiei de drepte $y = Cx - \frac{C^2}{2}$, $C \in \mathbb{R}$ (fig. 1).

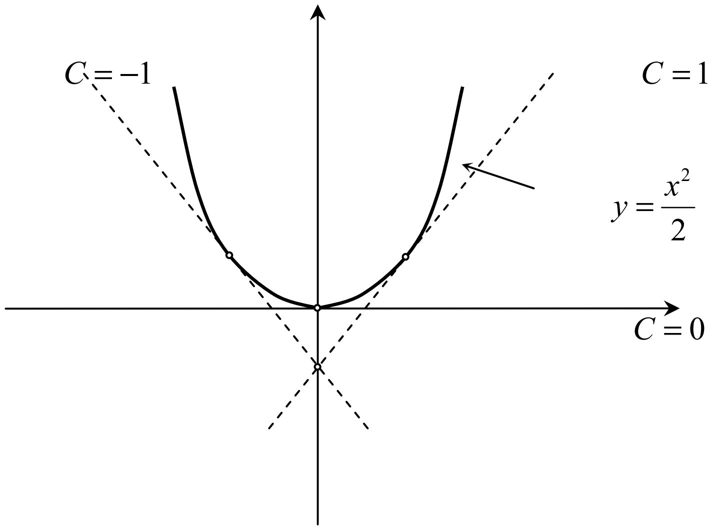


Fig. 1

1.2.7. Ecuații cu diferențiale exacte. Factor integrant

Sunt ecuații diferențiale de forma:

$$P(x,y) + Q(x,y)\,y' = 0, \tag{16}$$

unde P şi Q sunt funcţii de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ pe dreptunghiul $D=(a,b)\times(c,d)$, $Q\neq 0$ pe D şi

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \text{ pe } D.$$

Fie $(x_0,y_0)\in D$ un punct oarecare fixat şi fie $F: D\to\mathbb{R}$, definită astfel:

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(t,y_0)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}Q(x,t)\mathrm{d}t,\ (x,y)\in D. \tag{17}$$

Propoziţia 1.2.7. *În condiţiile de mai sus, orice funcţie implicită* $y=\varphi(x)$, *definită de ecuaţia* $F(x,y)=C$, $C\in\mathbb{R}$, *este soluţie pentru ecuaţia diferenţială* (16) *şi orice soluţie a ecuaţiei* (16) *este de această formă.*

Demonstraţie. Pentru început vom arăta că $\frac{\partial F}{\partial x}=P$ şi $\frac{\partial F}{\partial y}=Q$. Într-adevăr, ţinând seama de formula de derivare a integralei cu parametru şi de ipoteza $\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{\partial Q}{\partial y}$, rezultă

$$\frac{\partial F}{\partial x}=P(x,y_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial Q}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t=P(x,y_0)+\int_{y_0}^{y}\frac{\partial P}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}t=$$
$$=P(x,y_0)+P(x,y)-P(x,y_0)=P(x,y).$$

De asemenea, avem $\frac{\partial F}{\partial y}=Q(x,y)$. Aşadar, funcţia F definită în (17) are proprietatea că $\frac{\partial F}{\partial x}=P$ şi $\frac{\partial F}{\partial y}=Q$. Cu alte cuvinte, forma diferenţială $\omega=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ este exactă.

Fie ecuaţia

$$F(x,y)=C,\ (x,y)\in D. \tag{18}$$

Deoarece $\frac{\partial F}{\partial y}=Q\neq 0$ pe D, rezultă că în vecinătatea oricărui punct din D ecuaţia (18) defineşte o funcţie implicită $y=\varphi(x)$, $x\in I$. Deoarece $F[x,\varphi(x)]=0$, $\forall\ x\in I$, derivând obţinem $\frac{\partial F}{\partial x}[x,\varphi(x)]+\frac{\partial F}{\partial y}[x,\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)=0$, $\forall\ x\in I$.

Ţinând seama că $\frac{\partial F}{\partial x}=P$ şi $\frac{\partial F}{\partial y}=Q$, deducem că

$$P[x,\varphi(x)]+Q[x,\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)=0,\ \forall\ x\in I,$$

deci $y=\varphi(x)$, $x\in I$ este soluție pentru ecuația (16).

Reciproc, fie $y=\varphi(x)$, $x\in I$, o soluție a ecuației (16). Atunci, $\forall\, x\in I$, avem

$$(x,\varphi(x))\in D \text{ şi } P[x,\varphi(x)]+Q[x,\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)=0.$$

Deoarece $\dfrac{\partial F}{\partial x}=P$ şi $\dfrac{\partial F}{\partial y}=Q$, rezultă

$$\frac{\partial F}{\partial x}[x,\varphi(x)]+\frac{\partial F}{\partial y}[x,\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)=0,\ \forall\, x\in I,$$

ceea ce este echivalent cu

$$\frac{d}{dx}\left(F(x,\varphi(x))\right)=0,\ \forall\, x\in I.$$

Din ultima relație deducem că $F[x,\varphi(x)]=C$, $\forall\, x\in I$, deci $y=\varphi(x)$, $x\in I$, este o funcție implicită definită de ecuația (18). ∎

Exemplul 1.2.8. Să se afle soluțiile ecuației diferențiale

$$\left(3x^2-y\right)+\left(3y^2-x\right)y'=0,\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\left\{\left(3a^2,a\right);a\in\mathbb{R}\right\}.$$

Avem $P(x,y)=3x^2-y$, $Q(x,y)=3y^2-x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}=-1$.

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}\left(3t^2-y_0\right)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}\left(3t^2-x\right)\mathrm{d}t=x^3+y^3-xy+x_0y_0-x_0^3-y_0^3.$$

Aşadar, orice soluție a ecuației date este de forma $y=\varphi(x)$, $x\in I$, unde φ este o funcție implicită definită de ecuația $x^3+y^3-xy=K$.

Observația 1.2.3. Dacă $\dfrac{\partial P}{\partial y}\neq\dfrac{\partial Q}{\partial x}$, atunci se caută un factor integrant. Prin *factor integrant* se înțelege o funcție $\mu=\mu(x,y)$, $\mu\in\mathscr{C}^{(1)}(D)$, $\mu\neq 0$ pe D, cu proprietatea

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\mu(x,y)Q(x,y)\right]=\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x,y)P(x,y)\right],\ (x,y)\in D. \tag{19}$$

Aşadar, să considerăm ecuația diferențială

$$P(x,y)+Q(x,y)y'=0,\ Q\neq 0 \text{ pe } D \text{ şi } \frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{20}$$

Dacă reuşim să găsim un factor $\mu = \mu(x,y)$ şi înmulțim ecuația (20) cu acest factor integrant, obținem ecuația echivalentă $\mu(x,y)P(x,y) + \mu(x,y)Q(x,y)y' = 0$, care este de tipul (16) şi a cărei soluție se află în conformitate cu Propoziția 1.2.7.

Determinarea factorului integrant se face prin încercări. Să căutăm pentru început un factor integrant de forma $\mu = \mu(x)$ (care depinde numai de x). Din (19) rezultă

$$\mu'(x)Q(x,y) + \mu(x)\frac{\partial Q}{\partial x} = \mu(x)\frac{\partial P}{\partial y}$$

şi mai departe

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}. \tag{21}$$

Pentru ca egalitatea (21) să fie posibilă trebuie ca expresia $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ să depindă numai de x.

Aşadar, ecuația (20) admite factor integrant $\mu = \mu(x)$, dacă $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$ depinde numai de x. Să notăm cu

$$\varphi(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}.$$

Atunci $\dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \varphi(x)$ şi integrând obținem $\ln|\mu(x)| = \int \varphi(x)dx + C$.

Putem alege factorul integrant $\mu(x) = e^{\int \varphi(x)dx}$.

Exemplul 1.2.9. Determinând un factor integrant, să se găsească soluția ecuației diferențiale

$$\left(1 - x^2 y\right) + x^2(y - x)y' = 0,\ x \neq 0,\ x \neq y.$$

Avem $P = 1 - x^2 y$, $Q = x^2(y - x)$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2xy - 3x^2 \neq \dfrac{\partial P}{\partial y} = -x^2$, $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = -\dfrac{2}{x}$. Rezultă că $\mu(x) = e^{-\int \frac{2}{x}dx} = \dfrac{1}{x^2}$. Amplificând ecuația dată cu acest factor integrant, obținem

$$\left(\frac{1}{x^2}-y\right)+(y-x)y'=0.$$

Fie $P_1=\frac{1}{x^2-y}$ şi $Q_1=y-x$. Observăm că $\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial x}=-1$. Atunci

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}\left(\frac{1}{t^2}-y_0\right)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}(t-x)\mathrm{d}t=\frac{y^2}{2}-\frac{1}{x}-xy+K.$$

Soluția ecuației va fi orice funcție implicită $y=\varphi(x)$, $x\in I$, definită de ecuația

$$\frac{y^2}{2}-\frac{1}{x}-xy=C.$$

În mod analog, se arată că ecuația (20) cu $P \neq 0$, admite un factor integrant depinzând numai de y ($\mu=\mu(y)$), dacă expresia $\dfrac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}$ depinde numai de y.

Exemplul 1.2.10. Determinând un factor integrant, să se găsească soluția ecuației diferențiale

$$y^2(2x-3y)+\left(7-3xy^2\right)y'=0,\ y\neq 0,\ 2x\neq 3y,\ 7\neq 3xy^2.$$

Avem succesiv

$$P=y^2(2x-3y),\ Q=7-3xy^2,\ \frac{\partial P}{\partial y}=4xy-9y^2,\ \frac{\partial Q}{\partial x}=-3y^2;$$

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)}=\frac{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}{P}=-\frac{2}{y};\ \mu(y)=\frac{1}{y^2}.$$

Înmulțind ecuația dată cu $\frac{1}{y^2}$, obținem ecuația echivalentă $2x-3y+\left(\frac{7}{y^2}-3x\right)y'=0$.

Fie $P_1(x,y)=2x-3y$, $Q_1(x,y)=\frac{7}{y^2}-3x$. Evident $\frac{\partial Q_1}{\partial x}=\frac{\partial P_1}{\partial y}=-3$. Atunci

$$F(x,y)=\int_{x_0}^{x}(2t-3y_0)\mathrm{d}t+\int_{y_0}^{y}\left(\frac{7}{t^2}-3x\right)\mathrm{d}t=x^2-3xy-\frac{7}{y}+C.$$

Orice funcție implicită $y=\varphi(x)$, $x\in I$, definită de ecuația $x^2-3xy-\frac{7}{y}=K$ este soluție pentru ecuația dată.

Dacă ecuația nu admite factori integranți de forma $\mu=\mu(x)$ sau $\mu=\mu(y)$ se caută factori integranți de forme mai complicate $\mu=\mu(xy)$, $\mu=\mu(ax+by)$, $\mu=\mu\left(\frac{x}{y}\right)$ etc.

1.3. Ecuații diferențiale liniare de ordinul n

O *ecuație diferențială liniară neomogenă de ordinul n* este o ecuație de forma:

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x), \quad x\in I, \tag{1}$$

unde $a_0,a_1,\ldots,a_n,\quad f$ sunt funcții continue pe intervalul $I\subset\mathbb{R}$ şi $a_0(x)\neq 0, \forall x\in I$.

Ecuația diferențială omogenă asociată ecuației (1) este:

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+a_n(x)y=0, \quad x\in I, \tag{2}$$

Definiția 1.3.1. Spunem că o funcție $\varphi: I\to\mathbb{R}$ este *de clasă* $\mathscr{C}^{(p)}$ *pe intervalul I*, dacă φ admite derivate până la ordinul *p* inclusiv şi acestea sunt continue pe *I*.

Vom folosi notația $\varphi\in\mathscr{C}^{(p)}(I)$. De exemplu, $\varphi\in\mathscr{C}^{(0)}(I)$, dacă φ este continuă pe *I*, $\varphi\in\mathscr{C}^{(1)}(I)$ dacă există φ' şi este continuă pe *I* etc.

Este evident că $\mathscr{C}^{(p)}(I)$ este un subspațiu vectorial al spațiului vectorial al funcțiilor reale definite pe *I*, pe care îl vom nota $F(I,\mathbb{R})$.

Definiția 1.3.2. Se numeşte *soluție* a ecuației diferențiale (1) orice funcție $\varphi\in\mathscr{C}^{(n)}(I)$ care verifică ecuația, adică:

$$a_0(x)\varphi^{(n)}+a_1(x)\varphi^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}(x)\varphi'+a_n(x)\varphi=f(x), \quad x\in I.$$

Dacă notăm cu *D* operatorul de derivare $\left(D=\frac{d}{dx}\right)$, cu $D^p, p\in\mathbb{N}^*$ operatorul de derivare de ordinul *p*,

$$D^p=\underbrace{D\circ D\circ\ldots\circ D}_{p\ ori}=\frac{d^p}{dx^p},$$

cu D^0 operatorul identitate $\left(D^0(\varphi)=\varphi, \forall\varphi\in \mathscr{C}^{(n)}(I)\right)$ şi cu

$$L(D)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x)D^k = a_0(x)D^n + a_1(x)D^{n-1} + \ldots + a_{n-1}(x)D + a_n(x)D^0, \quad x\in I,$$

atunci ecuațiile (1) şi (2) se scriu pe scurt astfel:

$$L(D)(y)=f(x), \quad x\in I, \tag{1'}$$

respectiv

$$L(D)(y)=0, \quad x\in I. \tag{2'}$$

Propoziția 1.3.1. *Mulțimea S a soluțiilor ecuației omogene (2) este un subspațiu vectorial al spațiului de funcții* $F(I,\mathbb{R})$.

Demonstrație. Vom arăta că $\forall y,z\in S$ şi $\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, rezultă că $\lambda y+\mu z\in S$.

Pentru început reamintim că operatorul de derivare *D* este liniar, adică are proprietatea:

$$D(\lambda y+\mu z)=\lambda D(y)+\mu D(z), \quad \forall y,z\in \mathscr{C}^{(n)}(I), \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R}.$$

Într-adevăr,

$$D(\lambda y+\mu z)=\frac{d}{dx}(\lambda y+\mu z)=(\lambda y+\mu z)'=\lambda y'+\mu z'=$$

$$=\lambda\frac{dy}{dx}+\mu\frac{dz}{dx}=\lambda D(y)+\mu D(z).$$

Observăm că operatorul de derivare de ordinul *p* este, de asemenea, liniar. Într-adevăr, de exemplu:

$$D^2(\lambda x+\mu y)=(D\circ D)(\lambda x+\mu y)=D[D(\lambda x+\mu y)]=D(\lambda D(x)+\mu D(y)]=$$

$$=\lambda D[D(x)]+\mu D[D(y)]=\lambda D^2(x)+\mu D^2(y) \text{ etc.}$$

În sfârşit, observăm că operatorul $L(D)$ este liniar,

$$L(D)(\lambda y+\mu z)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x)D^k(\lambda y+\mu z)=\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\left(\lambda D^k(y)+\mu D^k(z)\right)=$$

$$=\lambda\sum_{k=0}^{n} a_k(x)D^k(y)+\mu\sum_{k=0}^{n} a_k(x)D^k(z)=\lambda L(D)(y)+\mu L(D)(z)$$

Dacă $y,z\in S$, atunci $L(D)(y)=0$ şi $L(D)(z)=0$. În continuare, avem:

$$L(D)(\lambda y+\mu z)=\lambda L(D)(y)+\mu L(D)(z)=0, \quad \forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},$$

deci $\lambda y + \mu z \in S$. ■

În spații de funcții există un aparat specific pentru studiul liniar dependenței (independenței). Acest aparat se bazează pe noțiunea de wronskian.

Definiția 1.3.3. Fie $f_1, f_2, ..., f_n : I \to \mathbb{R}$, n funcții de clasă $\mathscr{C}^{(n-1)}$ pe intervalul I. Se numeşte *wronskian* al acestor funcții, următoarea funcție:

$$W(x) = W[f_1,...,f_n](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & ... & f_n(x) \\ f_1'(x) & ... & f_n'(x) \\ ... & ... & ... \\ f_1^{(n-1)}(x) & ... & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

Propoziția 1.3.2. *Fie* $f_i \in \mathscr{C}^{(n-1)}(I), i = \overline{1,n}$. *Dacă* $f_1,...,f_n$ *sunt liniar dependente pe I, atunci* $W[f_1,...,f_n](x) = 0, \forall x \in I$.

Demonstrație. Prin ipoteză există n numere $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, nu toate nule, astfel încât

$$\lambda_1 f_1(x) + ... + \lambda_n f_n(x) = 0, \quad \forall x \in I. \tag{3}$$

Derivând succesiv relația (3) de $(n-1)$ ori obținem:

$$\begin{cases} \lambda_1 f_1(x) & + & ... & + & \lambda_n f_n(x) & = & 0 \\ \lambda_1 f_1'(x) & + & ... & + & \lambda_n f_1'(x) & = & 0 \\ .... & ... & ... & ... & .... & ... & ... \\ \lambda_1 f_1^{(n-1)}(x) & + & ... & + & \lambda_1 f_1^{(n-1)}(x) & = & 0, \quad \forall x \in I. \end{cases} \tag{4}$$

Am obținut astfel sistemul (4), care este un sistem (algebric) liniar şi omogen în necunoscutele $\lambda_1,...,\lambda_n$. Deoarece sistemul admite soluție nebanală, rezultă că determinantul coeficienților este 0. Aşadar avem:

$$W(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & ... & f_n(x) \\ f_1'(x) & ... & f_n'(x) \\ ... & ... & ... \\ f_1^{(n-1)}(x) & ... & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in I. \; ■$$

Propoziția 1.3.3. *Fie* $g, f_1, ..., f_n \in \mathscr{C}^{(n)}(I)$. *Dacă*

(i) $W[f_1,...,f_n](x) \neq 0, \quad \forall x \in I$;

(ii) $W[g, f_1, ..., f_n](x) = 0, \quad \forall x \in I$,

atunci g este o combinaţie liniară de $f_1, ..., f_n$*, deci există* $C_1, ..., C_n \in \mathbb{R}$*, astfel încât*

$$g(x) = C_1 f_1(x) + ... + C_n f_n(x), \forall x \in I.$$

Demonstraţie. Prezentăm demonstraţia în cazul particular $n = 2$. Prin ipoteză, avem:

$$\begin{vmatrix} g(x) & f_1(x) & f_2(x) \\ g'(x) & f_1'(x) & f_2'(x) \\ g''(x) & f_1''(x) & f_2''(x) \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in I. \tag{5}$$

Cum coloanele 2 şi 3 ale acestui determinant sunt liniar independente (deoarece, prin ipoteză, $W[f_1, f_2](x) \neq 0, \forall x \in I$), rezultă că prima coloană este o combinaţie liniară de acestea. Aşadar, $\forall x \in I$, există $\lambda_1(x), \lambda_2(x) \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\begin{cases} g(x) = \lambda_1(x) f_1(x) + \lambda_2(x) f_2(x) \\ g'(x) = \lambda_1(x) f_1'(x) + \lambda_2(x) f_2'(x) \\ g''(x) = \lambda_1(x) f_1''(x) + \lambda_2(x) f_2''(x) \end{cases}. \tag{6}$$

Ţinând seama că $f_1, f_2, g \in \mathscr{C}^{(2)}(I)$ şi că $W[f_1, f_2] \neq 0$ pe *I*, din (6) deducem că λ_1 şi λ_2 sunt funcţii derivabile pe *I*.

Derivând prima relaţie din (6) obţinem:

$$g'(x) = \lambda_1'(x) f_1(x) + \lambda_2'(x) f_2(x) + \lambda_1(x) f_1'(x) + \lambda_2(x) f_2'(x).$$

Pe de altă parte, ţinând seama de a doua relaţie din (6), deducem:

$$\lambda_1'(x) f_1(x) + \lambda_2' f_2(x) = 0. \tag{7}$$

În mod analog, derivând a doua relaţie din (6) şi ţinând seama de a treia relaţie, deducem:

$$\lambda_1'(x) f_1'(x) + \lambda_2' f_2'(x) = 0. \tag{8}$$

Am obţinut un sistem liniar şi omogen de două ecuaţii (ecuaţiile (7) şi (8)) în necunoscutele $\lambda_1'(x)$ şi $\lambda_2'(x)$. Cum, prin ipoteză, determinantul coeficienţilor

$$\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = W[f_1, f_2](x)$$

este nenul, rezultă că sistemul admite numai soluția banală. Aşadar, $\lambda_1'(x)=0$, $\lambda_2'(x)=0$, $\forall x\in I$, de unde rezultă că $\lambda_1(x)=C_1, \lambda_2(x)=C_2, \forall x\in I$. Conform primei relații din (6) avem:

$$g(x)=C_1 f_1(x)+C_2 f_2(x), \quad \forall x\in I. \blacksquare$$

Teorema 1.3.1. (Liouville) *Fie* $y_1, y_2, ..., y_n \in S$ *n soluții particulare ale ecuației omogene (2), fie* $x_0\in I$ *fixat şi fie* $W[x]=W[y_1,...,y_n](x)$. *Atunci*

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt}.$$

Demonstrație. Prezentăm demonstrația în cazul particular $n=2$. Fie y_1, y_2 două soluții particulare ale ecuației omogene $a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$. Atunci avem:

$$y_i''=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}y_i'-\frac{a_2(x)}{a_0(x)}y_i, \quad i=1,2, \quad x\in I. \tag{9}$$

Pe de altă parte, derivând wronskianul $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$, obținem:

$$\frac{dW}{dx}=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1'' & y_2'' \end{vmatrix}.$$

Ținând seama de (9) şi de proprietățile determinanților, rezultă:

$$\frac{dW}{dx}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ -\frac{a_1}{a_0}y_1'-\frac{a_2}{a_0}y_1 & -\frac{a_1}{a_0}y_2'-\frac{a_2}{a_0}y_2 \end{vmatrix}=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}\cdot\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

sau

$$\frac{dW}{dx}=-\frac{a_1(x)}{a_0(x)}W(x). \tag{10}$$

Se verifică imediat, prin derivare, că ecuația diferențială (10) admite soluția

$$W(x)=Ce^{-\int_{x_0}^{x}\frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt},$$

unde C este o constantă oarecare. În particular, pentru $x=x_0$, rezultă că $C=W(x_0)$, deci

$$W(x)=W(x_0)\, e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_0(t)}dt} . \blacksquare$$

Definiția 1.3.4. Se numeşte *sistem fundamental de soluții* pentru ecuația omogenă (2), orice set de *n* soluții particulare $y_1,...,y_n \in S$, cu proprietatea că există $x_0 \in I$, astfel încât

$$W[y_1,...,y_n](x_0)\neq 0 .$$

Corolarul 1.3.1. *Dacă* $y_1,...,y_n \in S$ *este un sistem fundamental de soluții, atunci* $y_1,...,y_n$ *sunt liniar independente pe I.*

Demonstrație. Fie $x_0 \in I$, astfel încât $W(x_0)\neq 0$. Din Teorema Liouville rezultă că $W(x)\neq 0$, $\forall x\in I$, iar din Propoziția 1.3.2, rezultă că $y_1,...,y_n$ sunt liniar independente pe *I*. ∎

Teorema 1.3.2. *Orice sistem fundamental de soluții din S este o bază în spațiul vectorial S.*

Demonstrație. Fie $y_1,...,y_n \in S$ un sistem fundamental de soluții. Conform Corolarului 1.3.1, sunt liniar independente. Rămâne să arătăm că $y_1,...,y_n$ este un sistem de generatori pentru *S*. Deoarece $y_1,...,y_n$ sunt soluții pentru (2), rezultă:

$$\begin{cases} a_0(x)y_1^{(n)} + a_1(x)y_1^{(n-1)} +...+ a_{n-1}(x)y_1' + a_n(x)y_1 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_0(x)y_n^{(n)} + a_1(x)y_n^{(n-1)} +...+ a_{n-1}(x)y_n' + a_n(x)y_n = 0 \end{cases} \tag{11}$$

Fie $y\in S$ oarecare. Atunci *y* verifică ecuația (2), deci

$$a_0(x)y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 . \tag{12}$$

Am obținut un sistem liniar şi omogen de $(n+1)$ ecuații (ecuațiile (11) şi (12)), în necunoscutele $a_0(x),...,a_n(x)$. Cum sistemul admite soluție nebanală $(a_0(x)\neq 0,\ \ \forall x\in I)$, rezultă că determinantul coeficienților este 0. Aşadar, avem:

$$\begin{vmatrix} y^{(n)} & y^{(n-1)} & \dots & y' & y \\ y_1^{(n)} & y_1^{(n-1)} & \dots & y_1' & y_1 \\ \dots\dots & \dots\dots\dots & \dots & \dots & \dots \\ y_n^{(n)} & y_n^{(n-1)} & \dots & y_n' & y_n \end{vmatrix} = 0, \quad \forall x \in I. \tag{13}$$

Egalitatea (13) este echivalentă cu $W[y, y_1, ..., y_n](x) = 0, \quad \forall x \in I$. Pe de altă parte, din Propoziția 1.3.2, rezultă că $W[y_1, ..., y_n](x) \neq 0$, $\forall x \in I$. Constatăm că sunt îndeplinite condițiile Propoziției 1.3.3, deci există $C_1, ..., C_n \in \mathbb{R}$, astfel încât $y = C_1 y_1 + ... + C_n y_n$. Mai mult, rezultă $\dim_{\mathbb{R}} S = n$. ■

Observația 1.3.1. Din Teorema 1.3.2, rezultă că dacă $y_1, ..., y_n$ este un sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă (2), atunci orice altă soluție a ecuației (2) este de forma

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n, \tag{14}$$

unde $C_i, i = \overline{1, n}$ sunt constante arbitrare.

Formula (14) reprezintă *soluția generală* a ecuației (2). Aşadar, pentru a găsi soluția generală a ecuației omogene (2) este suficient să găsim un sistem fundamental de soluții particulare ale acesteia. În general, determinarea unui sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă este dificilă pentru ecuații cu coeficienți variabili. Acest lucru este posibil însă în cazul ecuațiilor cu coeficienți constanți, de care ne vom ocupa în continuare.

Fie ecuația

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \tag{15}$$

unde $a_i, i = \overline{1, n}$ sunt constante reale, $a_0 \neq 0$.

Căutăm soluții ale ecuației (15) de forma

$$y = e^{rx}, \tag{16}$$

unde r este o constantă reală ce urmează să fie determinată.

Punând condiția ca funcția dată de (16) să verifice ecuația (15), rezultă:

$$e^{rx}\left(a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + ... + a_{n-1} r + a_n\right) = 0.$$

Se obține astfel ecuația algebrică (17), care se numeşte *ecuația caracteristică* ataşată ecuației diferențiale (2),

$$a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0 . \qquad (17)$$

Aşadar, am redus problema rezolvării ecuației diferențiale (15) la problema rezolvării ecuației algebrice (17). Distingem următoarele cazuri:

Cazul 1. Ecuația caracteristică (17) are rădăcini reale şi distincte. Fie $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$, rădăcinile ecuației (17), $r_i \neq r_j$, dacă $i \neq j$. Atunci $y_1 = e^{r_1 x}, y_2 = e^{r_2 x}, \ldots, y_n = e^{r_n x}$ vor fi soluții particulare ale ecuației omogene (15). Calculând wronskianul lor, obținem:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{r_1 x} & \ldots & e^{r_n x} \\ r_1 e^{r_1 x} & \ldots & r_n e^{r_n x} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ r_1^{n-1} e^{r_1 x} & \ldots & r_n^{n-1} e^{r_n x} \end{vmatrix} = e^{(r_1 + r_2 + \ldots + r_n)x} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & \ldots & r_n \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{n-1} & \ldots & r_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{(r_1 + \ldots r_n)x} \prod_{1 \le j < i \le n} (r_i - r_j) \neq 0 .$$

Rezultă că aceste soluții formează un sistem fundamental de soluții, deci soluția generală a ecuației diferențiale (2) este

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x} .$$

Exemplul 1.3.1. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y''' - 2y'' - 5y' + 6y = 0 .$$

Ecuația caracteristică este $r^3 - 2r^2 - 5r + 6 = 0$ şi are rădăcinile $r_1 = -2,\ r_2 = 1,\ r_3 = 3$.

Soluția generală a ecuației diferențiale este

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x} + C_3 e^{3x} .$$

Cazul 2. Ecuația caracteristică admite o rădăcină multiplă de ordin $m \le n$. Fie, de exemplu r_0 această rădăcină. Vom arăta că în acest caz ecuația diferențială (15) va admite următoarele soluții particulare:

$$y_1 = e^{r_0 x}, \quad y_2 = x e^{r_0 x}, \ldots, y_m = x^{m-1} e^{r_0 x} .$$

Pentru început, demonstrăm următoarea lemă:

Lema 1.3.1. *Pentru orice* $g \in \mathscr{C}^{(k)}(I)$ *avem* $\left(D - rD^0\right)^k \left(e^{rx} g(x)\right) = e^{rx} g^{(k)}(x)$, *unde* $D = \dfrac{d}{dx}$ *este operatorul de derivare și* D^0 *este operatorul identitate.*

Demonstrație. Demonstrația se face prin inducție matematică. Pentru $k = 1$ avem:

$$\left(D - rD^0\right)\left(e^{rx} g(x)\right) = re^{rx} g(x) + e^{rx} g'(x) - re^{rx} g(x) = e^{rx} g'(x).$$

Presupunem afirmația adevărată pentru orice $p < k$ şi o demonstrăm pentru $p + 1$.

$$\left(D - rD^0\right)^{p+1}\left(e^{rx} g(x)\right) = \left(D - rD^0\right)\left[\left(D - rD^0\right)^p\right]\left(e^{rx} g(x)\right) =$$

$$= \left(D - rD^0\right)\left(e^{rx} g^{(p)}(x)\right) = re^{rx} g^{(p)}(x) + e^{rx} g^{(p+1)}(x) - re^{rx} g^{(p)}(x) =$$

$$= e^{rx} g^{(p+1)}(x).$$

Cu aceasta lema este demonstrată. ■

Fie acum r_0 o rădăcină multiplă de ordinul m pentru ecuația caracteristică (17) şi fie $F(r) = a_0 r^n + \ldots + a_{n-1} r + a_n$, membrul stâng al ecuației (17). Atunci $F(r) = F_1(r) \cdot (r - r_0)^m$, unde F_1 este o funcție polinomială de gradul $n - m$. Acestei descompuneri a polinomului caracteristic $F(r)$ îi corespunde următoarea descompunere a operatorului diferențial $L(D)$:

$$L(D) = L_1(D) \circ \left(D - r_0 D^0\right)^m.$$

Din Lema 1.3.1., pentru $k < m$ avem:

$$L(D)\left(x^k e^{r_0 x}\right) = L_1(D)\left[\left(D - r_0 D^0\right)^m \left(x^k e^{r_0 x}\right)\right] = L_1(D)\left[e^{r_0 x} \cdot (x^k)^{(m)}\right] = 0.$$

Rezultă că $y = x^k e^{r_0 x}$ este soluție pentru ecuația diferențială (15), $\forall k < m$.

Observația 1.3.2. Orice set de funcții de forma $e^{rx}, xe^{rx}, \ldots, x^p e^{rx}$ este liniar independent pe $\mathbb{R}$. Într-adevăr, orice combinație liniară nulă a acestor funcții nu este posibilă decât dacă toți coeficienții combinației sunt nuli.

Exemplul 1.3.2. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale $y'' + 4y' + 4y = 0$.

Ecuația caracteristică este $r^2+4r+4=0$ şi are rădăcina dublă $r_1=r_2=-2$. Ecuația admite soluțiile particulare: $y_1=e^{-2x}$ şi $y_2=xe^{-2x}$, care sunt liniar independente, deci formează o bază. Soluția generală este:

$$y=C_1e^{-2x}+C_2xe^{-2x}.$$

Cazul 3. Ecuația caracteristică admite rădăcina complexă $r=\alpha+i\beta,\ \beta\neq 0$.

În acest caz, vom arăta că ecuația diferențială admite soluțiile particulare $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ şi $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$. Verificăm afirmația în cazul particular $n=2$. Presupunem că ecuația $a_0r^2+a_1r+a_2=0$ admite rădăcina $r_0=\alpha+i\beta, \beta\neq 0$. Atunci avem $a_0(\alpha+i\beta)^2+a_1(\alpha+i\beta)+a_2=0$, de unde deducem că:

$$\begin{cases} a_0(\alpha^2-\beta^2)+a_1\alpha+a_2=0 \\ 2a_0\alpha\beta+a_1\beta=0 \end{cases}. \tag{18}$$

Fie $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$. Atunci

$$y_1'=e^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x) \quad \text{şi} \quad y_1''=e^{\alpha x}(\alpha^2\cos\beta x-2\alpha\beta\sin\beta x-\beta^2\cos\beta x).$$

În continuare, avem:

$$a_0y_1''+a_1y_1'+a_2y_1=e^{\alpha x}\left[a_0\left(\alpha^2\cos\beta x-2\alpha\beta\sin\beta x-\beta^2\cos\beta x\right)+\right.$$

$$\left.+a_1(\alpha\cos\beta x-\beta\sin\beta x)+a_2\cos\beta x\right]=$$

$$=e^{\alpha x}[\left(a_0\left(\alpha^2-\beta^2\right)+a_1\alpha+a_2\right)\cos\beta x-(2a_0\alpha\beta+a_1\beta)\sin\beta x]=0,$$

în virtutea relațiilor (18).

Aşadar, dacă $\alpha+i\beta$ este rădăcină pentru ecuația caracteristică, atunci $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$ este soluție pentru ecuația diferențială (15). Analog se arată că $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ este soluție pentru ecuația diferențială (15). Pe de altă parte, este evident că aceste soluții $y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2=e^{\alpha x}\sin\beta x$ sunt liniar independente. Aşadar, în cazul particular $n=2$, soluția generală este: $y=C_1e^{\alpha x}\cos\beta x+C_2e^{\alpha x}\sin\beta x$.

În cazul când $\alpha + i\beta$ este rădăcină dublă pentru ecuația caracteristică, ecuația diferențială admite soluțiile particulare $e^{\alpha x}\cos\beta x$, $xe^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$, $xe^{\alpha x}\sin\beta x$ etc.

Exemplul 1.3.3. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale $y''+2y'+5=0$.

Ecuația caracteristică este $r^2+2r+5=0$ şi are rădăcinile $r_{1,2}=-1\pm 2\,i$. Avem $\alpha=-1$, $\beta=2$. Ecuația diferențială admite soluțiile particulare $y_1=e^{-x}\cos 2x$ şi $y_2=e^{-x}\sin 2x$.

Soluția generală este:

$$y=C_1e^{-x}\cos 2x+C_2e^{-x}\sin 2x.$$

Se poate întâmpla ca la o ecuație să întâlnim toate cele trei cazuri studiate anterior.

Exemplul 1.3.4. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y^{\mathrm{VII}}-y^{\mathrm{V}}-2y^{\mathrm{IV}}-5y^{\mathrm{III}}-4y^{\mathrm{II}}-3y^{\mathrm{I}}-2y=0.$$

Ecuația caracteristică este: $r^7-r^5-2r^4-5r^3-4r^2-3r-2=0$ şi are rădăcinile $r_1=r_2=-1$; $r_3=2$; $r_4=r_5=i$; $r_6=r_7=-i$. Ecuația diferențială admite următoarele soluții particulare: $y_1=e^{-x}$; $y_2=xe^{-x}$; $y_3=e^{2x}$; $y_4=\cos x$; $y_5=x\cos x$; $y_6=\sin x$; $y_7=x\sin x$.

Aceste soluții sunt liniar independente şi soluția generală este:

$$y=C_1e^{-x}+C_2xe^{-x}+C_3e^{2x}+C_4\cos x+C_5x\cos x+C_6\sin x+C_7x\sin x.$$

În continuare ne ocupăm de ecuația neomogenă (1).

Propoziția 1.3.4. *Fie* y_p *o soluție particulară a ecuației neomogene* (1). *Atunci, orice soluție a ecuației neomogene* (1) *este de forma* $y=y_1+y_p$, *unde* y_1 *este o soluție a ecuației omogene* (2).

Demonstrație. Fie S spațiul vectorial al soluțiilor ecuației omogene (2) şi fie $\mathscr{S}$ mulțimea soluțiilor ecuației neomogene (1). Atragem atenția că $\mathscr{S}$ nu este un spațiu

vectorial, pentru că nu este închis la sumă. $(y_1, y_2 \in \mathscr{S} \not\Rightarrow y_1 + y_2 \in \mathscr{S})$. Dacă $y_p \in \mathscr{S}$ şi $y_1 \in S$, atunci

$$L(D)(y_0 + y_p) = L(D)(y_0) + L(D)(y_p) = 0 + f(x) = f(x),$$

deci $y = y_0 + y_p \in \mathscr{S}$. Pe de altă parte, fie $y \in S$ şi $z = y - y_p$. Atunci

$$L(D)(z) = L(D)(y) - L(D)(y_p) = f(x) - f(x) = 0,$$

deci $z \in S$. Prin urmare $y = z + y_p$, unde $z \in S$. ■

Corolarul 1.3.2. *Soluția generală a ecuației neomogene* (1) *este de forma*

$$y = y_0 + y_p,$$

unde y_0 *este soluția generală a ecuației diferențiale omogene* (2) *şi* y_p *este o soluție particulară a ecuației diferențiale neomogene* (1).

Afirmația rezultă din Propoziția 1.3.4 şi din observația că, dacă y_0 este soluția generală a ecuației (2), atunci y_0 depinde de *n* constante arbitrare, deci şi *y* va avea această proprietate. ■

Din Corolarul 1.3.2, rezultă că este suficient să cunoaştem o soluție particulară a ecuației neomogene pentru a afla soluția generală a sa.

În cele ce urmează, vom arăta că, dacă se cunoaşte soluția generală a ecuației omogene (2), atunci, folosind *metoda variației constantelor a lui Lagrange*, se poate afla soluția generală a ecuației neomogene (1). Pentru simplificarea scrierii, să presupunem că $n = 2$.

Fie y_1, y_2 un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene (2). Atunci, soluția generală a ecuației omogene este

$$y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2. \tag{19}$$

Căutăm soluția generală a ecuației neomogene (1) de forma

$$y = \varphi_1(x) y_1 + \varphi_2(x) y_2. \tag{20}$$

Derivând, obținem

$$y' = \varphi_1(x) y_1' + \varphi_2(x) y_2' + \varphi_1'(x) y_1 + \varphi_2'(x) y_2.$$

Impunem condiția

$$\varphi_1'(x)y_1 + \varphi_2'(x)y_2 = 0\,. \tag{21}$$

Ținând seama de (21), rezultă că

$$y' = \varphi_1(x)y_1' + \varphi_2(x)y_2' \tag{22}$$

şi mai departe că

$$y'' = \varphi_1(x)y_1'' + \varphi_2(x)y_2'' + \varphi_1'(x)y_1' + \varphi_2'(x)y_2'\,. \tag{23}$$

În sfârşit, punând condiția ca funcția definită în (20) să verifice ecuația

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$$

şi ținând seama de (22) şi (23), rezultă:

$$a_0(x)\left[\varphi_1(x)y_1'' + \varphi_2(x)y_2'' + \varphi_1'(x)y_1' + \varphi_2'(x)y_2'\right] + a_1(x)\left[\varphi_1(x)y_1' + \varphi_2(x)y_2'\right] +$$
$$+ a_2(x)\left[\varphi_1(x)y_1 + \varphi_2(x)y_2\right] = f(x)$$

În continuare, avem:

$$\varphi_1(x)\left[a_0(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_2(x)y_1\right] + \varphi_2(x)\left[a_0(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_2(x)y_2\right] +$$
$$+ a_0(x)\left[\varphi_1'(x)y_1' + \varphi_2'(x)y_2'\right] = f(x).$$

Ținând seama că y_1 şi y_2 sunt soluții pentru ecuația omogenă, rezultă că

$$a_0(x)\left[\varphi_1'(x)y_1' + \varphi_2'(x)y_2'\right] = f(x)\,,$$

deci că

$$\varphi_1'(x)y_1' + \varphi_2'(x)y_2' = \frac{f(x)}{a_0(x)}\,. \tag{24}$$

Prin urmare, căutând soluția generală a ecuației neomogene (1) de forma (20), rezultă că funcțiile φ_1 şi φ_2 satisfac condițiile (21) şi (24), anume:

$$\begin{cases} \varphi_1'(x)y_1 + \varphi_2'(x)y_2 = 0 \\ \varphi_1'(x)y_1' + \varphi_2'(x)y_2' = \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}. \tag{25}$$

Cum determinantul coeficienților sistemului liniar (25) este chiar wronskianul funcțiilor y_1, y_2 şi este diferit de zero prin ipoteză, rezultă că sistemul (25) are soluție unică. Fie $\varphi_1'(x) = g_1(x)$ şi $\varphi_2'(x) = g_2(x)$ soluția unică a sistemului (25). Mai departe avem:

$$\varphi_1(x) = \int g_1(x)\mathrm{d}x + C_1 \text{ şi } \varphi_2(x) = \int g_2(x)\mathrm{d}x + C_2\,. \tag{26}$$

Înlocuind (26) în (20), obținem soluția generală a ecuației neomogene:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + y_1\int g_1(x)dx + y_2\int g_2(x)dx = y_0 + y_p\,, \tag{27}$$

unde $y_0 = C_1 y_1 + C_2 y_2$ este soluția generală a ecuației omogene, iar

$$y_p = y_1 \int g_1(x)\,dx + y_2 \int g_2(x)\,dx$$

este o soluție particulară a ecuației neomogene.

Observația 1.3.3. În cazul general, metoda variației constantelor constă în următoarele: fie $y_1, y_2, \ldots, y_n$ un sistem fundamental de soluții ale ecuației omogene (2). Atunci, soluția generală a ecuației (2) este $y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$.

Căutăm soluția generală a ecuației neomogene (1) de forma

$$y = \varphi_1(x) y_1 + \ldots + \varphi_n(x) y_n\,, \tag{28}$$

unde $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_n'$ verifică sistemul

$$\begin{cases} \varphi_1'(x) y_1 + \ldots + \varphi_n'(x) y_n = 0 \\ \varphi_1'(x) y_1' + \ldots + \varphi_n'(x) y_n' = 0 \\ \text{-------------------------} \\ \varphi_1'(x) y_1^{(n-1)} + \ldots + \varphi_n'(x) y_n^{(n-1)} = \dfrac{f(x)}{a_0(x)} \end{cases}. \tag{29}$$

Rezolvând sistemul (29) (care are soluție unică) şi integrând, obținem funcțiile $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ şi deci soluția generală a ecuației neomogene (1).

În concluzie, dacă cunoaştem un sistem fundamental de soluții pentru ecuația omogenă, atunci folosind metoda variației constantelor a lui Lagrange putem să aflăm soluția generală a ecuației neomogene.

În cele ce urmează, vom arăta cum se poate afla o astfel de soluție particulară în cazul când membrul drept este de forma

$$f(x) = e^{\lambda x}\,(P_1(x)\cos \mu x + P_2(x)\sin \mu x)\,,$$

unde P_1 şi P_2 sunt funcții polinomiale. Se disting două cazuri:

Cazul 1. (*fără rezonanță*) Dacă $\lambda + i\mu$ nu este rădăcină pentru ecuația caracteristică (17), se caută o soluție particulară a ecuației neomogene de forma

$$y_p = e^{\lambda x}(Q_1(x)\cos \mu x + Q_2(x)\sin \mu x)\,, \tag{30}$$

unde Q_1 şi Q_2 sunt funcții polinomiale de acelaşi grad,

$$grad\, Q_1 = grad\, Q_2 = \max(grad\, P_1, grad\, P_2)\,.$$

Determinarea polinoamelor Q_1 și Q_2 se face punând condiția ca funcția y_p, dată de (30), să verifice ecuația neomogenă.

Cazul 2. (*cu rezonanță*) Dacă $\lambda + i\mu$ este soluție pentru ecuația caracteristică (17) şi are ordinul de multiplicitate *m*, atunci se caută y_p de forma

$$y_p = x^m e^{\lambda x}[Q_1(x)\cos\mu x + Q_2(x)\sin\mu x]$$

şi se procedează în continuare ca în cazul 1.

Exemplul 1.3.5. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale $y'' - 5y' + 6y = 2e^{-x}$.

Ecuația diferențială omogenă asociată ecuației date este $y'' - 5y' + 6y = 0$ şi are ecuația caracteristică $r^2 - 5r + 6 = 0$. Rădăcinile ecuației caracteristice sunt $r_1 = 2, r_2 = 3$, deci soluția generală a ecuației omogene este $y_0 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Membrul drept este de forma (19), cu $\lambda = -1, \mu = 0, P_1(x) = 2, P_2(x) = 0$. Observăm că $\lambda + i\mu = -1$ nu este rădăcină a ecuației caracteristice, deci suntem în cazul 1 (fără rezonanță).

Alegem $y_p = ae^{-x}$ şi punem condiția să verifice ecuația neomogenă dată. Avem $y_p' = -ae^{-x}$, $y_p'' = ae^{-x}$ şi mai departe

$$2e^{-x} = y_p'' - 5y_p' + 6y_p = e^{-x}(a + 5a + 6a) = 12ae^{-x}.$$

Rezultă $a = \frac{1}{6}$, deci $y_p = \frac{1}{6}e^{-x}$. Soluția generală a ecuației diferențiale neomogene date este

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{6}e^{-x}.$$

Exemplul 1.3.6. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale $y'' - 5y' + 6y = 5e^{3x}$.

În acest caz, $\lambda = 3$, $\mu = 0$, $P_1 = 5$, $P_2 = 0$. Cum $\lambda + i\mu = 3$ este soluție a ecuației caracteristice, suntem în cazul 2, cu rezonanță. Căutăm y_p de forma $y_p = axe^{3x}$. Mai departe, avem:

$$y_p' = a(1+3x)e^{3x}, \quad y_p'' = a(6+9x)e^{3x},$$

$$5e^{3x} = y'' - 5y_p' + 6y_p = ae^{3x}(6+9x-5-15x+6x) = ae^{3x}.$$

Rezultă că $a = 5$, $y_p = 5xe^{3x}$, deci $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + 5xe^{3x}$ este soluția generală a ecuației diferențiale neomogene dată.

Exemplul 1.3.7. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$y'' - 5y' + 6y = 4\cos 2x.$$

Avem $\lambda = 0, \mu = 2, P_1 = 4, P_2 = 0, \lambda + i\mu = 2i$ nu este soluție pentru ecuația caracteristică.

Căutăm y_p de forma $y_p = a\cos 2x + b\sin 2x$. Derivând obținem:

$$y_p' = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x, \quad y_p'' = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x.$$

Punând condiția ca y_p să verifice ecuația neomogenă, obținem:

$$4\cos 2x = (-4a\cos 2x - 4b\sin 2x) - 5(-2a\sin 2x + 2b\cos 2x) + 6(a\cos 2x + b\sin 2x).$$

În continuare, avem:

$$(2a - 10b)\cos 2x + (10a + 2b)\sin 2x = 4\cos 2x.$$

Se obține sistemul $\begin{cases} 2a - 10b = 4 \\ 10a + 2b = 0 \end{cases}$, care are soluția $a = \frac{1}{13}, b = -\frac{5}{13}$.

Soluția generală a ecuației diferențiale date este:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{13}\cos 2x - \frac{5}{13}\sin 3x.$$

Exemplul 1.3.8. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale $y'' + y = 3\sin x$.

Ecuația diferențială omogenă asociată ecuației diferențiale date este $y'' + y = 0$ și are ecuația caracteristică $r^2 + 1 = 0$, care are rădăcinile complexe $r_{1,2} = \pm i$. Avem $\alpha = 0$, $\beta = 1$, de unde rezultă că soluția generală a ecuației omogene este $y_0 = C_1\cos x + C_2\sin x$. Deoarece $\lambda = 0$, $\mu = 1$ și $\lambda + i\mu = i$ este rădăcină pentru ecuația caracteristică, suntem în cazul 2, cu rezonanță. Alegem $y_p = x(a\cos x + b\sin x)$. Punând condiția ca y_p să verifice ecuația neomogenă obținem $a = -\frac{3}{2}$ și $b = 0$. Așadar, $y_p = -\frac{3}{2}x\cos x$ și soluția generală a ecuației neomogene este

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{3}{2} x \cos x .$$

1.4. Ecuații diferențiale de tip Euler

Prezentăm acum ecuațiile diferențiale de tip Euler, care sunt ecuații cu coeficienți variabili. Vom arăta că dacă facem schimbarea de variabilă $x = e^t$, aceste ecuații devin ecuații diferențiale liniare cu coeficienți constanți.

O ecuație diferențială de tip Euler este de forma:

$$a_0 x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = f(x) , \tag{1}$$

unde $a_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{0,n}$, sunt constante.

Dacă facem schimbarea de variabilă

$$x = e^t \tag{2}$$

şi notăm cu $z(t) = y\left(e^t\right)$, atunci avem:

$$z'(t) = y'\left(e^t\right) \cdot e^t \text{, deci } \ y'\left(e^t\right) = e^{-t} z(t) .$$

Derivând, în continuare, obținem:

$$z''(t) = y''\left(e^t\right) \cdot e^{2t} + y'\left(e^t\right) \cdot e^t = y''\left(e^t\right) \cdot e^{2t} + z'(t) ,$$

deci

$$y''\left(e^t\right) = e^{-2t} \left(z''(t) - z'(t)\right) ,$$

$$z'''(t) = y'''\left(e^t\right) \cdot e^{3t} + y''\left(e^t\right) \cdot 2e^{2t} + z''(t) = y'''\left(e^t\right) \cdot e^{3t} + 2\left(z''(t) - z'(t)\right) + z''(t)$$

Aşadar, avem

$$y'''\left(e^t\right) = e^{-3t} \left(z'''(t) - 3z''(t) + 2z'(t)\right) \text{ etc.}$$

În general

$$y^{(k)}\left(e^t\right) = e^{-kt} \left(z^{(k)}(t) + b_1 z^{(k-1)}(t) + \ldots + b_k z'(t)\right) . \tag{3}$$

Înlocuind (3) în (1), obținem o ecuație cu coeficienți constanți în necunoscuta $z = z(t)$.

Exemplul 1.4.1. Să se afle soluția generală a ecuației diferențiale

$$x^2 \cdot y'' - x \cdot y' + y = \ln x , \ x > 0 . \tag{4}$$

În urma schimbării de variabilă $x = e^t$, ecuația devine

$$e^{2t} \cdot e^{-2t}\left(z'' - z'\right) - e^t \cdot e^{-t} \cdot z' + z = t$$

sau

$$z'' - 2z' + z = t \,. \tag{5}$$

Ecuația omogenă $z'' - 2z' + z = 0$ are ecuația caracteristică $r^2 - 2r + 1 = 0$, care admite rădăcina dublă $r_1 = r_2 = t$. În consecință, soluția generală a ecuației omogene este:

$$z_0 = C_1\, e^t + C_2\, te^t \,. \tag{6}$$

Deoarece nu avem rezonanță, căutăm o soluție particulară a membrului drept de forma:

$$y_p = at + b \,. \tag{7}$$

Punând condiția ca y_p să verifice ecuația neomogenă (5), rezultă a = 1, b = 2, deci $y_p = t + 2$.

Soluția generală a ecuației neomogene (5) este $z = C_1 e^t + C_2\, te^t + t + 2$. Înlocuind $t = \ln x$, obținem soluția generală a ecuației (8):

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x + \ln x + 2 \,.$$

1.5. Studiul vibrațiilor unui sistem oscilant cu un singur grad de libertate

Considerăm un sistem oscilant cu un singur grad de libertate format dintr-o masă m şi un element elastic (un arc) ca în figura 1.

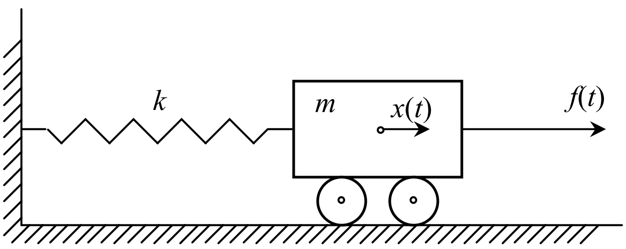


Fig. 1

Presupunem că asupra masei m, redusă la un punct material, acționează o forță perturbatoare $F(t)$, care determină o deplasare pe orizontală notată cu $x(t)$. În orice moment t al mişcării, punctul material se află în echilibru sub acțiunea următoarelor forțe: forța elastică F_e, forța de inerție $F_i = m \cdot \ddot{x}(t)$ şi forța perturbatoare $F(t)$ (fig. 2).

Aşadar, avem:

$$F_i + F_e = F(t)\,.$$

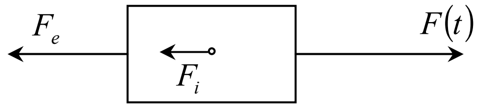


Fig. 2

Pentru deplasări mici, forța elastică este proporțională cu deplasarea (legea lui Hooke). Deci

$$F_e = k \cdot x(t)\,,$$

unde k este *coeficientul de rigiditate* şi se defineşte ca fiind forța necesară pentru a produce o deplasare unitară pe direcția acestei forțe. Inversul coeficientului de rigiditate $\delta = \dfrac{1}{k}$ se numeşte *flexibilitatea elementului elastic*.

Se obține astfel următoarea ecuație diferențială:

$$m \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = F(t)\,.$$

Dacă presupunem, în plus, că există şi o forță de frecare F_f, proporțională cu viteza de deplasare, $F_f = c \cdot \dot{x}(t)$, atunci ecuația devine

$$m \cdot \ddot{x}(t) + c \cdot \dot{x}(t) + k \cdot x(t) = F(t)\,. \tag{1}$$

Constanta c se numeşte *coeficientul de amortizare vâscoasă*.

În continuare, notăm cu ω *pulsația proprie a vibrației*, care se defineşte prin $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ şi cu ν *fracțiunea de amortizare critică*, definită prin $\nu = \dfrac{c}{2m\omega}$.

Cu aceste notații ecuația (1) devine

$$\ddot{x}(t) + 2\nu\ \omega\, \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F(t)}{m}\,. \tag{2}$$

Ecuația (2) este o ecuație diferențială liniară de ordinul doi, cu coeficienți constanți, neomogenă. Ecuația omogenă asociată este

$$\ddot{x}(t) + 2\nu\omega\, \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0 \tag{3}$$

şi modelează *cazul vibrațiilor libere cu amortizare vâscoasă*.

Ecuația caracteristică este

$$r^2 + 2\nu\omega r + \omega^2 = 0$$

şi admite soluțiile

$$r_{1,2} = -\nu\omega \pm i\omega\sqrt{1-\nu^2} .$$

Dacă notăm cu $\omega^* = \omega\sqrt{1-\nu^2}$, atunci soluția generală a ecuației omogene (3), care corespunde *vibrațiilor libere*, se notează cu $x_L(t)$ şi este

$$x_L(t) = e^{-\nu\,\omega\,t}\left(C_1 \sin\omega^* t + C_2 \cos\omega^* t\right).$$

Ecuația neomogenă (2) modelează *cazul vibrațiilor forțate cu amortizare vâscoasă*.

În continuare, vom presupune că forța perturbatoare $F(t)$ este de forma

$$F(t) = \frac{F_0}{m}\sin\theta t ,$$

unde F_0 este o constantă.

Ecuația neomogenă devine

$$\ddot{x}(t) + 2\nu\omega\,\dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \frac{F_0}{m}\cdot\sin\theta t . \tag{4}$$

Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene, $x_F(t)$ (corespunzătoare vibrațiilor forțate), de forma

$$x_F(t) = A\sin\theta t + B\cos\theta t . \tag{5}$$

Punând condiția ca soluția (5) să verifice ecuația diferențială (4), obținem

$$-A\theta^2 \sin\theta t - B\theta^2 \cos\theta t + 2\nu\omega\left(A\theta\cos\theta t - B\theta\sin\theta t\right) +$$

$$+\omega^2\left(A\sin\theta t + B\cos\theta t\right) = \frac{F_0}{m}\sin\theta t .$$

Identificând coeficienții lui $\sin\theta t$ şi $\cos\theta t$ din cei doi membri, obținem sistemul

$$\begin{cases} (\omega^2-\theta^2)\,A - 2\nu\omega\theta\,B = \dfrac{F_0}{m} \\ 2\nu\omega\theta\,A + (\omega^2-\theta^2)\,B = 0 \end{cases} ,$$

care admite soluția

$$A = \frac{\omega^2-\theta^2}{(\omega^2-\theta^2)^2 + 4\nu^2\omega^2\theta^2}\cdot\frac{F_0}{m} \text{ şi } B = \frac{-2\nu\omega\theta}{(\omega^2-\theta^2)^2 + 4\nu^2\omega^2\theta^2}\cdot\frac{F_0}{m} . \tag{6}$$

Soluția generală a ecuației neomogene (4) este

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t) = e^{-\nu\,\omega\,t}\left(C_1\sin\omega^* t + C_2\cos\omega^* t\right) + A\sin\theta t + B\cos\theta t . \tag{7}$$

Derivând (7), rezultă

$$\dot{x}(t) = -\nu\omega\, e^{-\nu\,\omega\, t}\left(C_1 \sin\omega^* t + C_2 \cos\omega^* t\right) + e^{-\nu\,\omega\, t}\left(\omega^* C_1 \cos\omega^* t - \omega^* C_2 \sin\omega^* t\right) +$$

$$+ A\theta \cos\theta t - B\theta \sin\theta t\,.$$

Vom determina soluțiile vibrațiilor stabilizate (staționare), care corespund condițiilor inițiale

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Din condițiile (8), deducem

$$C_2 = -B \ \text{ şi } \quad C_1 = -\frac{\theta}{\omega^*} A - \frac{\nu\omega}{\omega^*} B\,. \tag{9}$$

Ținând seama de (6) şi (9), obținem

$$x(t) = \frac{F_0}{m\omega^2\left[\left(1-\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right)^2 + 4\nu^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]}\left\{ e^{-\nu\,\omega\, t}\left[\frac{\theta}{\omega^*}\left(2\nu^2 + \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 - 1\right)\sin\omega^* t + 2\nu\frac{\theta}{\omega}\cos\omega^* t\right] + \right.$$

$$\left. + \left[\left(1-\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right)\sin\theta t - 2\nu\frac{\theta}{\omega}\cos\theta t\right]\right\}. \tag{10}$$

Fie

$$\alpha = \frac{\theta}{\omega^*}\left[2\nu^2 + \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2 - 1\right] \ \text{ şi } \ \beta = 2\nu\frac{\theta}{\omega}. \tag{11}$$

Observăm că expresia $\alpha \sin\omega^* t + \beta\cos\omega^* t$ se poate prelucra astfel:

$$\alpha \sin\omega^* t + \beta\cos\omega^* t = \alpha(\sin\omega^* t + \frac{\beta}{\alpha}\cos\omega^* t)\,.$$

Fie $\varphi = arctg\frac{\beta}{\alpha}$, deci $tg\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$. Atunci avem:

$$\alpha \sin\omega^* t + \beta\cos\omega^* t = \alpha(\sin\omega^* t + tg\varphi\cos\omega^* t) =$$

$$= \frac{\alpha}{\cos\varphi}(\sin\omega^* t\cos\varphi + \sin\varphi\cos\omega^* t) = \frac{\alpha}{\cos\varphi}\sin(\omega^* t + \varphi)\,.$$

Pe de altă parte

$$\frac{1}{\cos^2\varphi} = 1 + tg^2\varphi = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{\alpha^2},$$

de unde deducem că

$$\alpha \sin \omega^* t + \beta \cos \omega^* t = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\omega^* t + \varphi) . \tag{12}$$

Ținând seama de (11), rezultă

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{\theta^2}{\omega^2 (1-\nu^2)} \left[\left(1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right)^2 + 4\nu^2 \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right]. \tag{13}$$

Dacă notăm cu $\gamma = 1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2$ şi cu $\delta = -2\nu \frac{\theta}{\omega}$, atunci

$$\gamma^2 + \delta^2 = \left[1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right]^2 + 4\nu^2 \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \tag{14}$$

şi aşa cum am arătat mai sus, avem

$$\gamma \sin \theta t + \delta \cos \theta t = \sqrt{\gamma^2 + \delta^2} \sin(\theta t + \psi) , \tag{15}$$

unde

$$\psi = arctg \frac{\delta}{\gamma} .$$

Ținând seama de (12), (13), (14), (15) în expresia soluției generale (10), rezultă

$$x(t) = \frac{F_0 e^{-\nu \omega t}}{m\theta^2 \sqrt{1-\nu^2}} \cdot \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^3 \mu^* \sin(\omega^* t + \varphi) + \frac{F_0}{m\theta^2} \cdot \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \mu^* \sin(\theta t + \psi) , \tag{16}$$

unde

$$\mu^* = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right)^2 + 4\nu^2 \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2}} \tag{17}$$

reprezintă *coeficientul dinamic* sau *factorul de amplificare*.

În sfârşit, dacă notăm cu $\lambda = \frac{F_0}{m\theta^2}$, atunci soluția căutată este

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t) ,$$

unde

$$x_L(t) = \frac{\lambda}{\sqrt{1-\nu^2}} \frac{\left(\frac{\theta}{\omega} \right)^3}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right)^2 + 4\nu^2 \left(\frac{\theta}{\omega} \right)^2}} \cdot e^{-\nu \omega t} \cdot \sin(\omega \sqrt{1-\nu^2}\ t + \varphi) ,$$

$$\varphi = arctg\frac{2\nu\sqrt{1-\nu^2}}{2\nu^2+\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2-1},$$

iar

$$x_F(t) = \lambda\cdot\frac{\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right)^2+4\nu^2\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2}}\cdot\sin(\theta t+\psi),$$

$$\psi = arctg\frac{2\nu\frac{\theta}{\omega}}{\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2-1}.$$

Analizând soluția obținută, constatăm că primul termen, $x_L(t)$, care modelează vibrațiile libere, este de forma

$$x_L(t) = Ae^{-\nu\,\omega\,t}\sin(\omega^* t+\varphi),$$

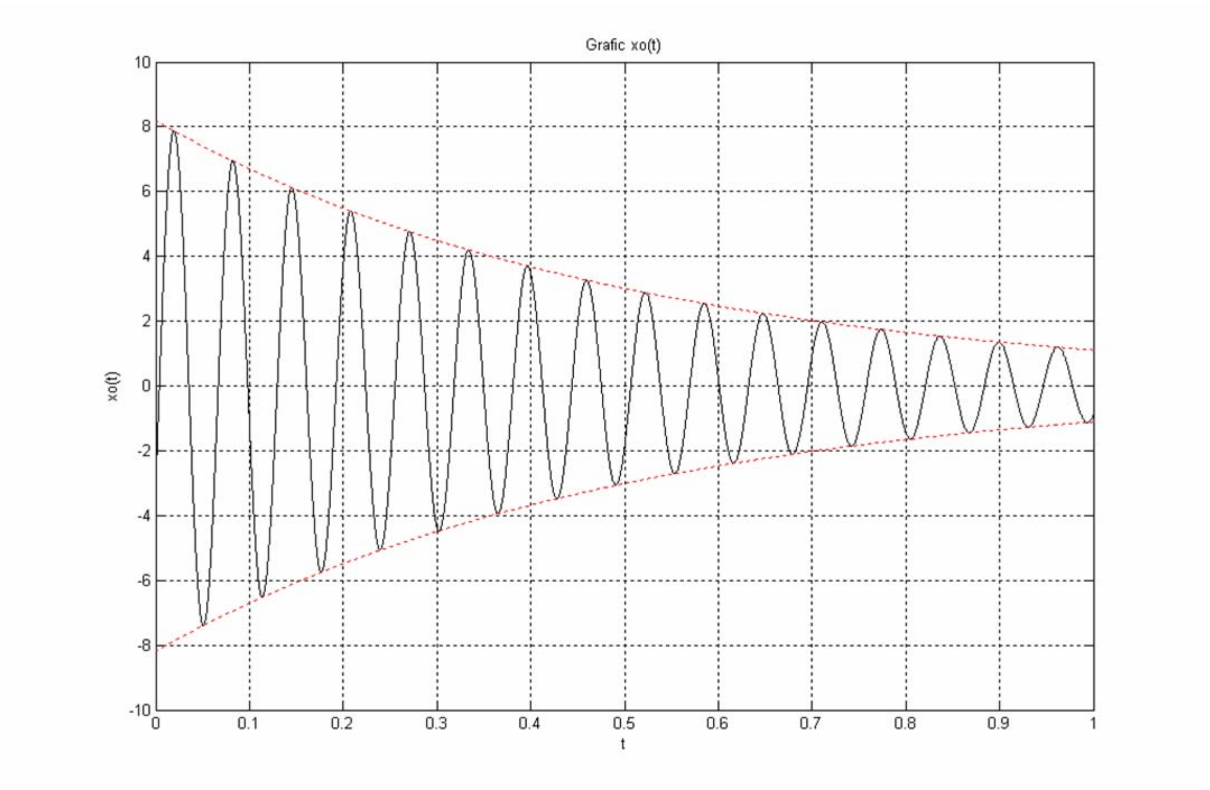


Fig. 3

soluție care exprimă o mişcare armonică cu pulsația ω^* şi amplitudinea $Ae^{-\nu\,\omega\,t}$ şi care descreşte exponențial în timp. O asemenea mişcare se mai numeşte şi *cvasiarmonică* şi este reprezentată grafic în figura 3.

Soluția ecuației neomogene, care corespunde vibrațiilor forțate,

$$x_F(t) = B\sin(\theta t + \psi)\,,$$

exprimă o *mişcare armonică* (*sinusoidală*) de pulsație θ şi amplitudine B (figura 4).

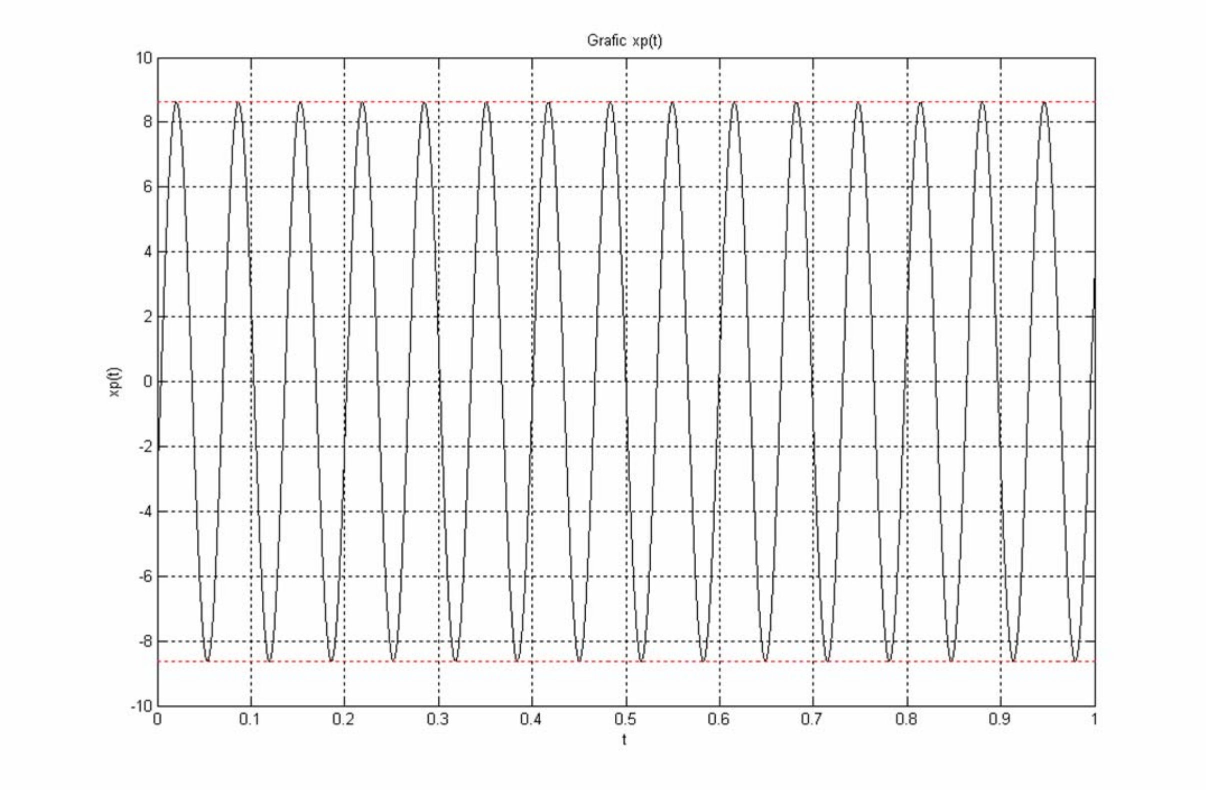


Fig. 4

Când acțiunea forței perturbatoare este de lungă durată, vibrația totală, $x(t) = x_L(t) + x_F(t)$, se reduce la vibrația forțată $x_F(t)$, deoarece $x_L(t)$ tinde la 0, datorită factorului $e^{-\nu\,\omega\,t}$. În această situație, care interesează din punct de vedere practic, mişcarea capătă un caracter staționar.

Graficul soluției $x(t)$, care se obține prin însumarea graficelor din figurile 3 şi 4, arată ca în figura 5.

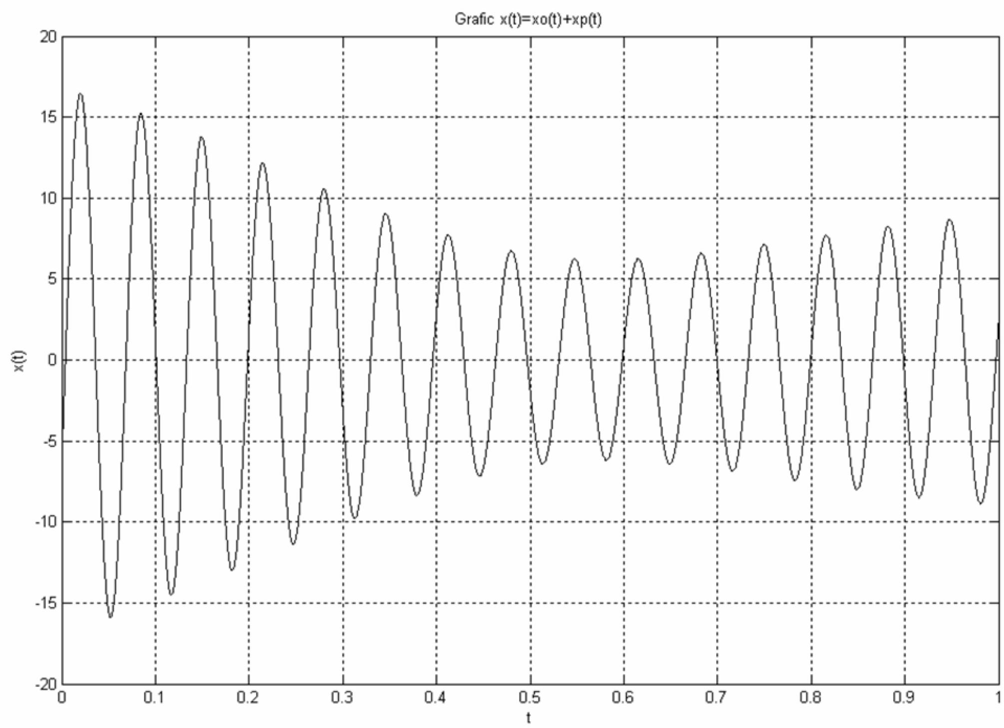


Fig. 5

În cazul lipsei forței de amortizare vâscoasă ($\nu = 0$), avem

$$x_F(t) = \frac{F_0}{m\omega^2\left[1-\left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2\right]} \cdot \sin(\theta t + \psi) .$$

Observăm că dacă $\theta = \omega$, situație care corespunde cazului de rezonanță, $x_F(t)$ devine infinit. Această situație este ipotetică, deoarece, în realitate, sistemul are întotdeauna o amortizare internă, care limitează mărimea deplasărilor.

Să revenim la cazul general când $\nu \neq 0$. Analizând amplitudinea soluției în acest caz, observăm că în zona rezonanței $(\theta \cong \omega)$, deplasările nu mai devin infinite, dar, în această zonă, amplitudinea are valori maximale.

Un grafic al factorului de amplificare μ^* în funcție de raportul $\frac{\theta}{\omega}$ şi pentru diferite valori ale frecvenței este prezentat în figura 6.

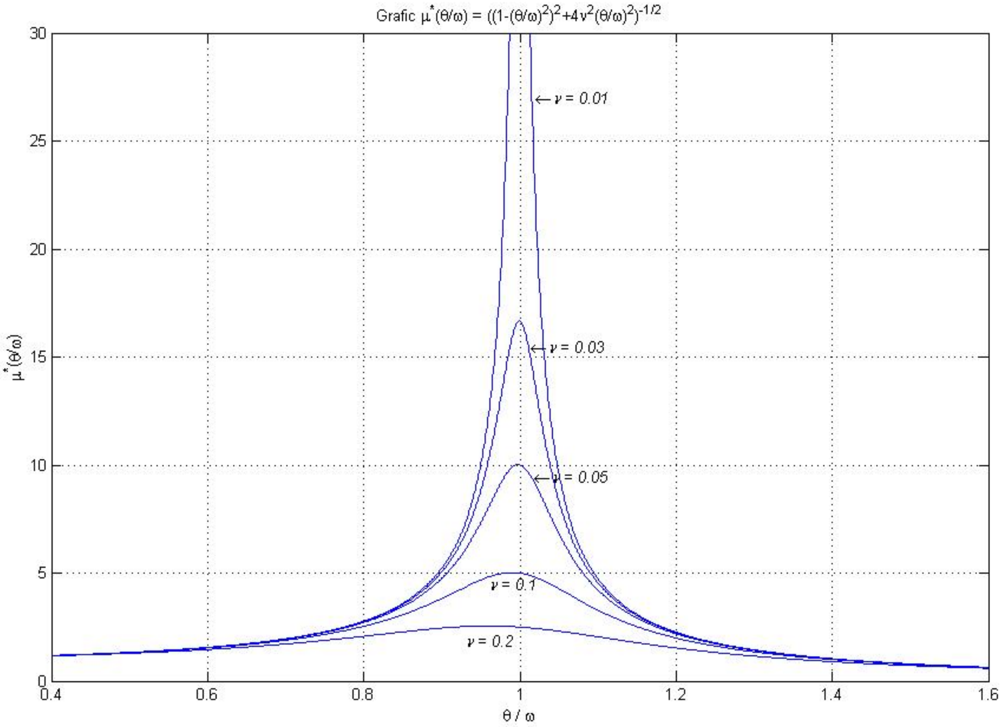


Fig. 6

1.6. Metode numerice. Metoda Euler

După cum este cunoscut, aflarea soluției exacte a problemei Cauchy pentru o ecuație diferențială nu este posibilă decît în anumite cazuri. De exemplu, determinarea soluției exacte a ecuației diferențiale aparent simplă

$$y' = x^2 + y^2, \ y(0) = 1,$$

nu este posibilă.

Se justifică astfel necesitatea recurgerii la metode numerice (aproximative) pentru rezolvarea problemei Cauchy. Metodele numerice constau în alegerea unor *noduri echidistante* x_k, $k \in \mathbb{N}$, şi determinarea unor *valori aproximative* y_k ale soluției exacte $y = y(x)$ în aceste noduri, deci $y_k \approx y(x_k)$.

În cele ce urmează, prezentăm cea mai simplă metodă directă de rezolvare a problemei Cauchy şi anume *metoda lui Euler*.

Fie problema Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}, \quad (x,y) \in D = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b].$$

Presupunem că $f \in \mathscr{C}^{(1)}(D)$, deci *f* este continuă, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ este continuă şi deci mărginită pe *D*. În aceste condiții, *f* este lipschitziană în raport cu *y* pe *D*, deci sunt îndeplinite condițiile teoremei de existență şi unicitate. Aşadar, problema Cauchy considerată are o soluție unică $y = y(x)$, $x \in I \subset [x_0 - a, x_0 + a]$, cu proprietățile:

$$y'(x) = f(x, y(x)),\ \forall x \in I,$$

$$y(x_0) = y_0.$$

Deoarece $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, rezultă că ecuația tangentei în punctul $M_0(x_0, y_0)$ la curba integrală a acestei soluții, este:

$$y = y_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Considerăm nodurile echidistante $x_k = x_0 + kh$, $h > 0$, $k = \overline{1,n}$, $x_k \in I$, şi notăm cu $y_1 = y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0)$ (vezi figura 1).

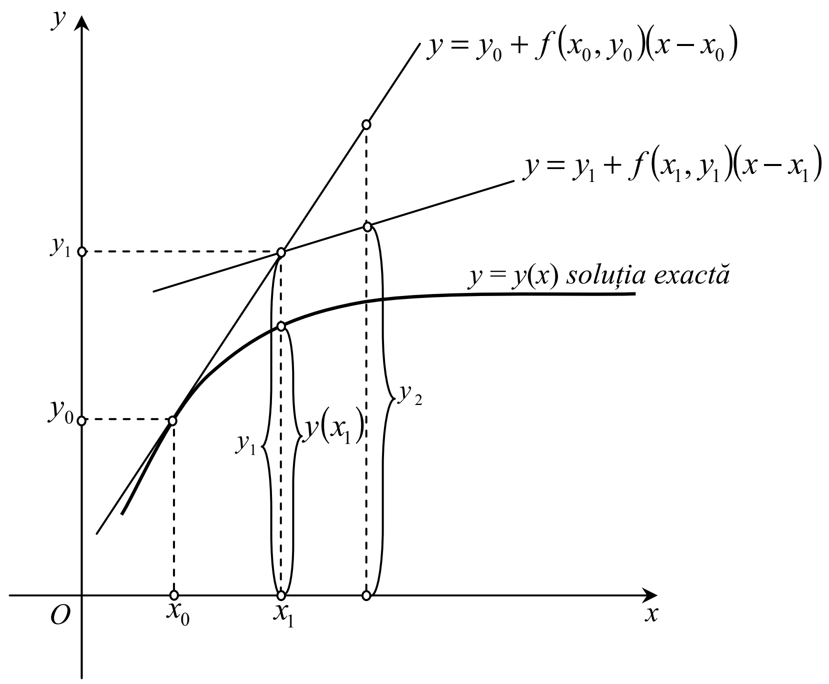


Fig. 1

Aproximăm soluția exactă $y = y(x)$ a problemei Cauchy considerate, în punctul x_1, cu soluția aproximativă y_1. Aşadar

$$y(x_1) \approx y_0 + f(x_0, y_0)(x_1 - x_0) = y_0 + f(x_0, y_0)\cdot h .$$

În continuare, considerăm dreapta

$$y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1)$$

şi aproximăm soluția exactă $y = y(x)$ a problemei Cauchy, în punctul x_2, cu

$$y_2 = y_1 + f(x_1, y_1)(x_2 - x_1),$$

deci $y(x_2) \approx y_1 + f(x_1, y_1)\cdot h$ etc.

Se obține următorul algoritm:

$$\begin{cases} y_k = y_{k-1} + h\cdot f(x_{k-1}, y_{k-1}) \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}, \ k \geq 1 . \tag{1}$$

Pentru estimarea erorii, folosim formula Taylor. Presupunând că $f \in \mathscr{C}^{(2)}(D)$, avem:

$$y(x_k) = y(x_{k-1} + h) = y(x_{k-1}) + y'(x_{k-1})\cdot h + o(h^2) .$$

Cum $y'(x_{k-1}) = f(x_{k-1}, y_{k-1})$, rezultă că

$$y(x_k) = y(x_{k-1}) + h\cdot f(x_{k-1}, y_{k-1}) + o(h^2) . \tag{2}$$

Din (1) şi (2) deducem că:

$$y(x_k) - y_k = y(x_{k-1}) - y_{k-1} + o(h^2) .$$

Prin urmare, eroarea la pasul k se obține din eroarea la pasul precedent, $k-1$, la care se adaugă un infinit mic de ordinul 2 ($o(h^2)$).

Exemplul 1.6.1. Fie problema Cauchy

$$\begin{cases} y' = y^2 - \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{4x^2} \\ y(1) = \dfrac{1}{2} \end{cases} .$$

Să se determine soluția aproximativă în punctul $x = 2$, în doi paşi.

În acest caz, avem: $f(x, y) = y^2 - \dfrac{y}{x} - \dfrac{1}{4x^2}$,

$$x_0 = 1,\ y_0 = 0{,}5,\ n = 2,\ h = 0{,}5,\ x_1 = 1{,}5,\ x_2 = 2,$$

$$y_1 = y_0 + h\cdot f(x_0, y_0) = 0{,}25,$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 0{,}14236\,.$$

Aşadar $y(2) \approx 0{,}14236$.

Pe de altă parte, observăm că ecuația diferențială considerată este o ecuație de tip Riccati, care admite soluția particulară $y_p = \dfrac{1}{2x}$. Cum această soluție satisface condiția inițială $y(1) = \dfrac{1}{2}$, rezultă că $y = \dfrac{1}{2x}$ este soluția exactă a problemei Cauchy considerate.

Valoarea soluției exacte în punctul *2*, este $y(2) = \dfrac{1}{4} = 0{,}25$. Se obține o eroare destul de mare $y(2) - y_2 \cong 0{,}1$. Dacă foloseam mai mulți paşi, deci alegeam un pas h mai mic, obțineam o eroare mai mică, deci mai bună.

Exemplul 1.6.2. Fie problema Cauchy

$$\begin{cases} y' = y - x \\ y(0) = 2 \end{cases}.$$

Să se determine soluția aproximativă în punctul $x = 0{,}5$, în cinci paşi.

În acest caz, avem: $f(x, y) = y - x$,

$$x_0 = 0,\ y_0 = 2,\ n = 5,\ h = 0{,}1,\ x_1 = 0{,}1,\ x_2 = 0{,}2,\ x_3 = 0{,}3,\ x_4 = 0{,}4,\ x_5 = 0{,}5$$

$$y_1 = 2{,}2,\ y_2 = 2{,}41,\ y_3 = 2{,}631,\ y_4 = 2{,}8641,\ y_5 = 3{,}1105\,.$$

Ecuația diferențială este liniară şi are soluția exactă $y = e^x + x + 1$, deci

$$y(x_5) = y(0{,}5) = 3{,}1487 \text{ şi } \left| y(x_5) - y_5 \right| \cong 0{,}03\,.$$

Metoda Euler este o metodă foarte simplă, dar, aşa cum am văzut, prezintă o anumită lipsă de acuratețe.

O metodă mai precisă este *metoda Runge-Kutta*. Fără a intra în detalii, prezentăm algoritmul Runge-Kutta de ordinul 4:

$$\begin{cases} y_k = y_{k-1} + \dfrac{h}{6}(g_1 + 2g_2 + 2g_3 + g_4),\ k \ge 1, \\ y_0 = y(x_0) \end{cases}$$

unde

$$\begin{cases} g_1 = f(x_{k-1}, y_{k-1}) \\ g_2 = f(x_{k-1} + \frac{h}{2}, y_{k-1} + \frac{h}{2} g_1) \\ g_3 = f(x_{k-1} + \frac{h}{2}, y_{k-1} + \frac{h}{2} g_2) \\ g_4 = f(x_{k-1} + h, y_{k-1} + h g_3) \end{cases}.$$

Exemplul 1.6.3. Pentru comparație, considerăm aceeaşi problemă Cauchy ca în Exemplul 1.6.1. Folosim aceleaşi notații ca acolo. Obținem succesiv:

$$g_1 = -0,5\,,\; g_2 = -0,31937\,,\; g_3 = -0,31959\,,\; g_4 = -0,22218\,,$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6}[g_1 + 2(g_2 + g_3) + g_4] = 0,33332\,.$$

Pentru calculul lui y_2, avem

$$g_1 = f(x_1, y_1) = -0,22222\,,\; g_2 = -0,1632\,,\; g_3 = -0,16322\,,\; g_4 = -0,125\,,$$

$$y_2 = 0,24999\,.$$

Eroarea $|y(2) - y_2| = |0,25 - 0,24999| = 10^{-5}$ este mult mai mică decât în cazul metodei Euler.

CAPITOLUL 2

SISTEME DE ECUAȚII DIFERENȚIALE

2.1. Sisteme de ecuații diferențiale. Teorema de existență şi unicitate

Prin *sistem de n ecuații diferențiale de ordinul întâi sub formă normală*, se înțelege un sistem de forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1\left(x, y_1, \ldots, y_n\right) \\ \text{-------------------------} \\ \dfrac{dy_n}{dx_n} = f_n\left(x, y_1, \ldots, y_n\right) \end{cases}, \tag{1}$$

unde $f_1, \ldots, f_n$ sunt funcții continue definite pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Definiția 2.1.1. Se numeşte *soluție* a sistemului (1) orice set de n-funcții $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$ ($I \subset \mathbb{R}$ interval deschis), $\varphi_i \in \mathscr{C}^{(1)}(I)$, $i = \overline{1,n}$, cu proprietatea

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi_1(x)}{dx} = f_1\left[x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right] \\ \text{-------------------------------------} \\ \dfrac{d\varphi_n(x)}{dx} = f_n\left[x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right] \end{cases}, \quad \forall\, x \in I.$$

(Se subînțelege că am presupus că $\left(x, \varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)\right) \in D$, $\forall\ x \in I$).

În general, un sistem de ecuații diferențiale admite o infinitate de soluții. Pentru a selecta o anumită soluție se impun condiții inițiale.

Definiția 2.1.2. Fie $M_0\left(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}\right)$ un punct oarecare din D fixat. Se numeşte *problema Cauchy* pentru sistemul (1), problema determinării unei soluții a acestui sistem, $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$, care verifică condiția inițială:

$$\varphi_1(x_0)=y_{10},\ldots,\varphi_n(x_0)=y_{n0}\,. \tag{2}$$

Dacă adoptăm scrierea vectorială: $y=(y_1,\ldots,y_n)$, $f=(f_1,\ldots,f_n)$, $\varphi=(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$, $y_0=(y_{10},\ldots,y_{n0})$, sistemul (1) se scrie

$$y'=f(x,y), \tag{1'}$$

iar *problema Cauchy* constă în determinarea unei funcții vectoriale $\varphi: I\to\mathbb{R}^n$, $\varphi\in\mathscr{C}^{(1)}(I)$, cu proprietățile:

$$(x,\varphi(x))\in D,\ \forall\, x\in I,\ \varphi'(x)=f(x,\varphi(x)),\ \forall\, x\in I,\ \varphi(x_0)=y_0\,. \tag{2'}$$

Definiția 2.1.3. O funcție $f:D\to\mathbb{R}^{n+1}$ se numeşte *lipschitziană* pe *D*, în raport cu y_1, ..., y_n, dacă există o constantă $L>0$ astfel încât

$$\left|f(x,y_1,\ldots,y_n)-f(x,z_1,\ldots,z_n)\right|\le L\sum_{j=1}^{n}\left|y_j-z_j\right|,$$

oricare ar fi punctele $(x,y_1,\ldots,y_n)$ *şi* $(x,z_1,\ldots,z_n)$ din *D*.

Observația 2.1.1. Dacă *D* este o mulțime deschisă şi convexă, $f\in\mathscr{C}^{(1)}(D)$ şi există $M>0$ astfel încât

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y_1,\ldots,y_n)\right|\le M,\ \forall\ (x,y_1,\ldots,y_n)\in D \text{ şi } \forall\ i=\overline{1,n},$$

atunci *f* este lipschitziană pe *D*.

Într-adevăr, din teorema creşterilor finite a lui Lagrange, rezultă că oricare ar fi $P(x,y_1,\ldots,y_n)\in D$ şi oricare ar fi $Q(x,z_1,\ldots,z_n)\in D$ există un punct $(x,\xi_1,\ldots,\xi_n)$ pe segmentul de dreaptă deschis, de capete *P* şi *Q*, astfel încât

$$f(x,y_1,\ldots,y_n)-f(x,z_1,\ldots,z_n)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,\xi_1,\ldots,\xi_n)(y_j-z_j)\,.$$

În continuare, avem:

$$\left|f(x,y_1,\ldots,y_n)-f(x,z_1,\ldots,z_n)\right|\le\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,\xi_1,\ldots,\xi_n)\right|\left|(y_j-z_j)\right|\le$$

$$\le M\sum_{j=1}^{n}\left|(y_j-z_j)\right|,$$

deci *f* este lipschitziană pe *D*.

Teorema 2.1.1. (Teorema de existență şi unicitate pentru sisteme de ecuații diferențiale)

Fie $M_0(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $a, b_i > 0$, $i = \overline{1,n}$ *şi* $D = (x_0 - a, x_0 + a) \times \Delta$, *unde*

$$\Delta = \prod_{j=1}^{n} (y_{j0} - b_j, y_{j0} + b_j) = (y_{10} - b_1, y_{10} + b_1) \times \ldots \times (y_{n0} - b_n, y_{n0} + b_n).$$

Dacă $f_i : \overline{D} \to \mathbb{R}$ *este continuă şi lipschitziană pe* $\overline{D}$, *în raport cu* $y_1, \ldots, y_n$, *oricare ar fi* $i = \overline{1,n}$, *atunci există o soluție unică a sistemului* (1):

$$y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x),\ x \in I \subset (x_0 - a, x_0 + a),$$

cu proprietatea:

$$\varphi_1(x_0) = y_{10}, \ldots, \varphi_n(x_0) = y_{n0}.$$

(Cu alte cuvinte, în condițiile precizate, problema Cauchy (1) - (2) *are soluție unică).*

Demonstrație. Pentru fiecare $i = \overline{1,n}$, funcția f_i este continuă pe mulțimea compactă $\overline{D}$, deci este mărginită pe $\overline{D}$. Fie $M_i > 0$ marginea superioară a funcției f_i pe $\overline{D}$ şi fie $M = \max\{M_1, \ldots, M_n\}$. Fie de asemenea $L = \max\{L_1, \ldots, L_n\}$, unde $L_i > 0$ este constanta Lipschitz a funcției f_i pe $\overline{D}$, $i = \overline{1,n}$. Fie, de asemenea, $\alpha \in (0,1)$ oarecare şi fie

$$h = \min\left(a, \frac{b_1}{M}, \ldots, \frac{b_n}{M}, \frac{\alpha}{nL}\right).$$

Notăm cu $I = (x_0 - h, x_0 + h)$. Evident, $I \subset (x_0 - a, x_0 + a)$. Procedând ca în demonstrația Lemei 1.1.1, se arată că rezolvarea problemei Cauchy (1)-(2) este echivalentă cu rezolvarea următorului sistem de ecuații integrale:

$$\begin{cases} y_1(x) = y_{10} + \int_{x_0}^{x} f_1[t, y_1(t), \ldots, y_n(t)]\mathrm{d}t \\ \text{-------------------------------} \\ y_n(x) = y_{n0} + \int_{x_0}^{x} f_n[t, y_1(t), \ldots, y_n(t)]\mathrm{d}t\ ,\ x \in I \end{cases}. \qquad (3)$$

Rezultă că dacă arătăm că sistemul (3) are soluție unică, atunci teorema este demonstrată.

Pentru început, vom arăta că există o soluție a problemei Cauchy sau, echivalent, vom arăta că există o soluție a sistemului de ecuații integrale (3). Demonstrația se bazează pe

metoda aproximațiilor succesive, utilizată la demonstrarea teoremei de existență a soluției pentru ecuații diferențiale de ordinul întâi.

Definim prima aproximație $y_1^{(1)} = y_1^{(1)}(x)$, $y_2^{(1)} = y_2^{(1)}(x)$,..., $y_n^{(1)} = y_n^{(1)}(x)$, $x \in I$, astfel:

$$\begin{cases} y_1^{(1)}(x) = y_{10} + \int\limits_{x_0}^{x} f_1(t, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})dt \\ y_2^{(1)}(x) = y_{20} + \int\limits_{x_0}^{x} f_2(t, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})dt \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^{(1)}(x) = y_{n0} + \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0})dt \end{cases}, \ x \in I.$$

Deoarece funcțiile f_i, $i = \overline{1,n}$, sunt continue, rezultă că $y_i^{(1)}$, $i = \overline{1,n}$, sunt continue pe *I*.

Pe de altă parte, pentru orice $i = \overline{1,n}$ şi pentru orice $x \in I$, avem

$$\left| y_i^{(1)}(x) - y_{i0} \right| \le \left| \int\limits_{x_0}^{x} \left| f_i(t, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}) \right| dt \right| \le M \left| \int\limits_{x_0}^{x} dt \right| =$$

$$= M\left|x - x_0\right| \le Mh \le M \cdot \frac{b_i}{M} = b_i. \tag{4}$$

Aşadar, $y_i^{(1)} : I \to [y_{i0} - b_i, y_{i0} + b_i]$, deci $(t, y_1^{(1)}(t), ..., y_n^{(1)}(t)) \in \overline{D}$, $\forall t \in I$.

Construim aproximația a doua $y_1^{(2)} = y_1^{(2)}(x)$, $y_2^{(2)} = y_2^{(2)}(x)$,..., $y_n^{(2)} = y_n^{(2)}(x)$, $x \in I$, astfel:

$$\begin{cases} y_1^{(2)}(x) = y_{10} + \int\limits_{x_0}^{x} f_1(t, y_1^{(1)}(t), ..., y_n^{(1)}(t))dt \\ y_2^{(2)}(x) = y_{20} + \int\limits_{x_0}^{x} f_2(t, y_1^{(1)}(t), ..., y_n^{(1)}(t))dt \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^{(2)}(x) = y_{n0} + \int\limits_{x_0}^{x} f_n(t, y_1^{(1)}(t), ..., y_n^{(1)}(t))dt \end{cases}, \ x \in I.$$

Din continuitatea funcțiilor f_i, $i = \overline{1,n}$, precum şi din continuitatea funcțiilor $y_i^{(1)}$, $i = \overline{1,n}$, rezultă continuitatea funcțiilor $y_i^{(2)}$, $i = \overline{1,n}$.

Pe de altă parte, se observă că pentru orice $i = \overline{1,n}$ şi pentru orice $x \in I$, avem

$$\left| y_i^{(2)}(x) - y_{i0} \right| \le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f_i(t, y_1^{(1)}(t),..., y_n^{(1)}(t)) \right| dt \right| \le M \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| =$$

$$= M \left| x - x_0 \right| \le Mh \le M \cdot \frac{b_i}{M} = b_i .$$

Aşadar, $y_i^{(2)} : I \to [y_{i0} - b_i, y_{i0} + b_i]$, deci $(t, y_1^{(2)}(t),..., y_n^{(2)}(t)) \in \overline{D}$, $\forall t \in I$.

În general, definim aproximația de ordinul m:

$$y_1^{(m)} = y_1^{(m)}(x),\ y_2^{(m)} = y_2^{(m)}(x),..., y_n^{(m)} = y_n^{(m)}(x),\ x \in I,$$

astfel:

$$\begin{cases} y_1^{(m)}(x) = y_{10} + \int_{x_0}^{x} f_1(t, y_1^{(m-1)}(t),..., y_n^{(m-1)}(t))dt \\ y_2^{(m)}(x) = y_{20} + \int_{x_0}^{x} f_2(t, y_1^{(m-1)}(t),..., y_n^{(m-1)}(t))dt \\ \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n^{(m)}(x) = y_{n0} + \int_{x_0}^{x} f_n(t, y_1^{(m-1)}(t),..., y_n^{(m-1)}(t))dt \end{cases},\ x \in I.$$

şi constatăm că $y_i^{(m)}$, $i = \overline{1,n}$, sunt funcții continue pe I cu valori în intervalele $[y_{i0} - b_i, y_{i0} + b_i]$, $i = \overline{1,n}$, deci $(t, y_1^{(m)}(t),..., y_n^{(m)}(t)) \in \overline{D}$, $\forall t \in I$.

Procedeul continuă nedefinit.

Pentru fiecare $i = \overline{1,n}$, considerăm următoarea serie de funcții pe I:

$$y_{i0} + (y_i^{(1)} - y_{i0}) + ... + (y_i^{(m)} - y_i^{(m-1)}) + ... \qquad (5)$$

şi observăm că şirul sumelor sale parțiale este:

$$s_i^{(m)}(x) = y_i^{(m)}(x),\ \forall x \in I.$$

Dacă vom arăta că seria (5) este uniform convergentă pe I, va rezulta că şirul $(y_i^{(m)})_m$ este uniform convergent pe I. Folosind ipoteza că funcția f_i este lipschitziană pe $\overline{D}$ în raport cu $y_1,..., y_n$ şi ținând seama de (4), avem:

$$\left| y_i^{(2)}(x) - y_i^{(1)}(x) \right| = \left| \int_{x_0}^{x} \left| f_i\left(t, y_1^{(1)}(t),..., y_n^{(1)}(t)\right) - f_i\left(t, y_{i0},..., y_{n0}\right) \right| dt \right| \le$$

$$\le L\sum_{j=1}^{n}\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_j^{(1)}(t)-y_{j0}\right|dt\right|\le LnM\left|\int_{x_0}^{x}|t-x_0|\,dt\right|=LnM\frac{|x-x_0|^2}{2}\le\frac{nLM}{2!}h^2 .$$

Aşadar, avem:

$$\left|y_i^{(2)}(x)-y_i^{(1)}(x)\right|\le\frac{nLM}{2!}|x-x_0|^2,\ \forall x\in I,\ i=\overline{1,n}. \tag{6}$$

Folosind din nou faptul că f este lipschitziană şi ținând seama de (6), rezultă:

$$\left|y_i^{(3)}(x)-y_i^{(2)}(x)\right|=\left|\int_{x_0}^{x}\left|f_i\left(t,y_1^{(2)}(t),...,y_n^{(2)}(t)\right)-f_i\left(t,y_1^{(1)}(t),...,y_n^{(1)}(t)\right)\right|dt\right|\le$$

$$\le L\cdot\sum_{j=1}^{n}\left|\int_{x_0}^{x}\left|y_j^{(2)}(t)-y_j^{(1)}(t)\right|dt\right|\le\frac{L^2n^2M}{2!}\left|\int_{x_0}^{x}|t-x_0|^2\,dt\right|=\frac{L^2n^2M}{2!}\frac{|x-x_0|^3}{3}\le\frac{n^2L^2M}{3!}h^3,$$

deci:

$$\left|y_i^{(3)}(x)-y_i^{(2)}(x)\right|\le\frac{L^2n^2M}{3!}|x-x_0|^3$$

În general, avem:

$$\left|y_i^{(m)}(x)-y_i^{(m-1)}(x)\right|\le\frac{n^{m-1}L^{m-1}M}{m!}|x-x_0|^m\le\frac{n^{m-1}L^{n-1}M}{m!}h^m,\ \forall x\in I. \tag{7}$$

Observăm că seria numerică $\sum_{m=1}^{\infty}\frac{M\cdot n^{m-1}L^{m-1}}{m!}h^m$ este convergentă, aşa cum rezultă din criteriul raportului:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{u_{m+1}}{u_m}=\lim_{n\to\infty}\frac{M\cdot n^mL^m}{(m+1)!}h^{m+1}\cdot\frac{m!}{M\cdot n^{m-1}L^{m-1}h^m}=\lim_{m\to\infty}\frac{nLh}{m+1}=0<1 .$$

Conform (7), seria de funcții (5) este majorată pe intervalul I de o serie numerică convergentă, deci seria (5) este uniform convergentă pe I, conform criteriului lui Weierstrass.

Aşadar, am demonstrat că pentru fiecare $i=\overline{1,n}$, şirul aproximațiilor $\left(y_i^{(m)}\right)_m$ este uniform convergent pe intervalul I. Notăm cu φ_i limita acestui şir. Cum $y_i^{(m)}\xrightarrow[I]{u}\varphi_i$ şi $y_i^{(m)}$ sunt funcții continue pe I, rezultă că φ_i este, de asemenea, continuă pe I.

Dacă notăm cu

$$\left\|y_i^{(m)}-\varphi_i\right\|_\infty=\sup\left\{\left|y_i^{(m)}(t)-\varphi_i(t)\right|;\ t\in I\right\},$$

atunci faptul că $y_i^{(m)}\xrightarrow[I]{u}\varphi_i$ revine la a spune că

$$\lim_{m\to\infty}\left\|y_i^{(m)}-\varphi_i\right\|_\infty=0 .$$

Pe de altă parte, avem:

$$\left| \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, y_1^{(m-1)}(t), \ldots, y_n^{(m-1)}(t)\right) dt - \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right) dt \right| \le$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f_i\left(t, y_1^{(m-1)}(t), \ldots, y_n^{(m-1)}(t)\right) - f_i\left(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right) \right| dt \right| \le$$

$$\le L \left| \int_{x_0}^{x} \sum_{j=1}^{n} \left| y_j^{(m-1)}(t) - \varphi_j(t) \right| dt \right| \le L \sum_{j=1}^{n} \left\| y_j^{(m-1)} - \varphi_j \right\|_\infty \cdot \left| \int_{x_0}^{x} dt \right| \le$$

$$\le Lh \cdot \sum_{j=1}^{n} \left\| y_j^{(m-1)} - \varphi_j \right\|_\infty . \tag{8}$$

Deoarece membrul drept tinde la 0 când $m \to \infty$, deducem că

$$\lim_{m \to \infty} \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, y_1^{(m-1)}(t), \ldots, y_n^{(m-1)}(t)\right) dt = \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right) dt .$$

Ținând seama de acest fapt, când trecem la limită în relația

$$y_i^{(m)}(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_2(t, y_1^{(m-1)}(t), \ldots, y_n^{(m-1)}(t)) dt , \ \forall x \in I ,$$

rezultă că

$$\varphi_i(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right) dt , \ \forall x \in I , \ \forall i = \overline{1, n} .$$

Așadar, funcțiile $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sunt soluții ale sistemului de ecuații integrale (3), deci sunt soluții ale problemei Cauchy pentru sistemul de ecuații diferențiale considerat.

Pentru a demonstra unicitatea, să presupunem că ar mai exista o soluție $\psi_1, \ldots, \psi_n$, cu proprietățile

$$\psi_i(x) = y_{i0} + \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\right) dt , \ \forall x \in I , \ \forall i = \overline{1, n} .$$

Pentru orice $x \in I$, avem

$$\left| \varphi_i(x) - \psi_i(x) \right| = \left| \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right) dt - \int_{x_0}^{x} f_i\left(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\right) dt \right| \le$$

$$\le \left| \int_{x_0}^{x} \left| f_i\left(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\right) - f_i\left(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\right) \right| dt \right| \le$$

$$\leq Lh \cdot \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_j - \psi_j \right\|_\infty \leq L \cdot \frac{\alpha}{nL} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_j - \psi_j \right\|_\infty < \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_j - \psi_j \right\|_\infty .$$

În continuare, avem

$$\left\| \varphi_i - \psi_i \right\|_\infty = \sup\left\{ \left| \varphi_i(x) - \psi_i(x) \right|;\ x \in I \right\} < \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_j - \psi_j \right\|_\infty$$

şi mai departe

$$\sum_{i=1}^{n} \left\| \varphi_i - \psi_i \right\|_\infty < n \cdot \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} \left\| \varphi_j - \psi_j \right\|_\infty = \sum_{i=1}^{n} \left\| \varphi_i - \psi_i \right\|_\infty ,$$

ceea ce reprezintă o contradicție.

Aşadar, $\varphi_i = \psi_i$, $\forall i = \overline{1, n}$, şi cu aceasta teorema este demonstrată. ■

Definiția 2.1.4. Prin *ecuație diferențială de ordinul n, sub formă normală,* înțelegem o ecuație diferențială de forma:

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)} \right), \tag{9}$$

unde *f* este o funcție continuă definită pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $y = y(x)$ este funcția necunoscută, iar $y^{(k)}$ este derivata de ordinul *k* a lui *y*, $k = \overline{1, n-1}$.

Prin *soluție* a ecuației (9) se înțelege orice funcție $y = \varphi(x)$, $x \in I$, $\varphi \in \mathscr{C}^{(n-1)}(I)$, cu proprietățile:

$$\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x) \right) \in D ,\ \forall\ x \in I$$

şi

$$y^{(n)}(x) = f\left[x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x) \right],\ \forall\ x \in I .$$

Fie $M_0\left(x_0, y_0, y_{10}, \ldots, y_{n-1,0} \right) \in D$ un punct oarecare fixat. *Problema Cauchy* pentru ecuația diferențială (4) şi punctul M_0 constă în determinarea unei soluții $y = \varphi(x)$, $x \in I$, a ecuației (4) care îndeplineşte condițiile:

$$\varphi\left(x_0 \right) = y_0 ,\ \varphi'\left(x_0 \right) = y_{10}, \ldots, \varphi^{(n-1)}\left(x_0 \right) = y_{n-1,0} . \tag{10}$$

Teorema 2.1.2. *Fie*

$$D = \left(x_0 - a, x_0 + a \right) \times \left(y_0 - b_0, y_0 + b_0 \right) \times \prod_{j=1}^{n-1} \left(y_{j0} - b_j, y_{j0} + b_j \right)$$

un paralelipiped cu centrul în $M_0\left(x_0, y_0, y_{10}, \ldots, y_{n-1,0}\right) \in D$. *Presupunem că* $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ *este continuă şi lipschitziană în raport cu toate argumentele, mai puțin x.*

În aceste condiții, problema Cauchy (9) - (10) *are soluție unică.*

Demonstrație. Dacă introducem notațiile:

$$y_1 = y', \; y_2 = y'', \ldots, y_{n-1} = y^{(n-1)}, \tag{11}$$

atunci ecuația (9) se înlocuieşte cu următorul sistem de ecuații diferențiale:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1 \\ \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ -------------------- \\ \dfrac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1} \\ \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = f\left(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}\right) \end{cases}. \tag{12}$$

Cum sistemul (12) verifică condițiile din Teorema 2.1.1, rezultă că există o soluție unică a sistemului (12):

$$y = \varphi(x), \; y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_{n-1} = \varphi_{n-1}(x), \; x \in I, \tag{13}$$

care verifică condiția inițială

$$\varphi\left(x_0\right) = y_0, \; \varphi_1\left(x_0\right) = y_{10}, \ldots, \varphi_{n-1}\left(x_0\right) = y_{n-1,0}. \tag{14}$$

Dacă ținem seama de notațiile (11) şi de faptul că (13) este soluție pentru sistemul (12) obținem: $\varphi^{(n)}(x) = f\left[x, \varphi(x), \varphi'(x), \ldots, \varphi^{(n-1)}(x)\right]$, $\forall \; x \in I$, deci $y = \varphi(x)$, $x \in I$ este soluție pentru ecuația (9). Pe de altă parte din (11) şi (14) rezultă că $\varphi\left(x_0\right) = y_0$, $\varphi'\left(x_0\right) = y_{10}$, ..., $\varphi^{(n-1)}\left(x_0\right) = y_{n-1,0}$. Aşadar, $y = \varphi(x)$, $x \in I$ este soluție unică pentru problema Cauchy (9)+(10). ■

Exemplul 2.1.1. Să se rezolve următoarea problemă Cauchy

$$y'' + y = x, \; y(0) = 1, \; y'(0) = 3.$$

Soluția generală a ecuației diferențiale $y'' + y = x$ este $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$. Din condițiile inițiale $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$, rezultă $C_1 = 1$ şi $C_2 = 2$. Soluția problemei Cauchy este

$y = \cos x + 2 \sin x + x$.

2.2. Sisteme de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi

Un sistem de ecuații diferențiale liniare de ordinul întâi este de forma următoare:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n + b_n(x) \\ \text{------------------------} \\ \dfrac{dy_n}{dx_n} = a_{n1}(x)y_1 + \ldots + a_{nn}(x)y_n + b_n(x) \end{cases}, \tag{1}$$

unde a_{ij} şi b_i sunt funcții continue definite pe un interval $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$.

Sistemul omogen asociat sistemului (1) este:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}(x)y_1 + \ldots + a_{1n}(x)y_n \\ \text{--------------------} \\ \dfrac{dy_n}{dx_n} = a_{n1}(x)y_1 + \ldots + a_{nn}(x)y_n \end{cases}. \tag{2}$$

Dacă introducem notațiile vectoriale:

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},\ A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ \text{------} \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

sistemul (1) devine

$$\frac{dY}{dx} = AY + b, \tag{1'}$$

iar sistemul (2) se mai poate scrie sub forma

$$\frac{dY}{dx} = AY. \tag{2'}$$

Observația 2.2.1. Dacă notăm cu $f_i(x) = a_{i1}(x)y_1 + \ldots + a_{in}(x)y_n + b_i(x)$, $\forall\, x \in I$, $\forall\, i = \overline{1,n}$, atunci $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_j} = a_{ij}(x)$. Fie $x_0 \in (a,b) = I$ şi fie $J \subset I$ un interval închis care conține punctul x_0. Deoarece funcțiile a_{ij} şi b_i sunt continue pe I, rezultă că aceste funcții sunt mărginite pe J.

Din Observația 2.1.1 rezultă că funcțiile f_i sunt lipschitziene în raport cu $y_1, \ldots, y_n$ pe domeniul $J \times \mathbb{R}^n$. Rezultă că pe o vecinătate suficient de mică a punctului $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}) \in J \times \mathbb{R}^n$, Teorema 2.1.1 de existență şi unicitate este valabilă. De fapt, se poate demonstra mai mult, că oricare ar fi $a < x_0 < b$ şi oricare ar fi $y_0 = (y_{10}, \ldots, y_{n0}) \in \mathbb{R}^n$, există o

soluție unică a sistemului liniar (1) $y_1 = \varphi_1(x),\dots, y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$, care verifică condiția inițială $\varphi_1(x_0) = y_{10},\dots,\varphi_n(x_0) = y_{n0}$.

În continuare vom studia sistemul omogen (2).

Propoziția 2.2.1. *Dacă Y_1 și Y_2 sunt soluții ale sistemului omogen* (*2*)*, atunci* $\forall \alpha_1$, $\alpha_2 \in \mathbb{R}$*, rezultă că* $\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2$ *este, de asemenea, soluție a sistemului omogen* (*2*)*.*

Demonstrație. Deoarece operația de derivare este liniară rezultă:

$$\frac{d}{dx}(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2) = \alpha_1 \frac{dY_1}{dx} + \alpha_2 \frac{dY_2}{dx} = \alpha_1 A Y_1 + \alpha_2 A Y_2 = A(\alpha_1 Y_1 + \alpha_2 Y_2). \quad \blacksquare$$

Dacă notăm cu S mulțimea soluțiilor sistemului omogen (2) din Propoziția 2.2.1, rezultă că S este un spațiu vectorial real.

Definiția 2.2.1. Fie $Y = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix},\dots, Y_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}$ n soluții particulare ale sistemului omogen (2). Se numeşte *wronskian* al acestor soluții, următorul determinant:

$$W(x) = W[Y_1,\dots,Y_n](x) = \begin{vmatrix} y_{11}(x) & \dots & y_{1n}(x) \\ \hline y_{n1}(x) & \dots & y_{nn}(x) \end{vmatrix}, \ x \in I.$$

Propoziția 2.2.2. *Dacă* $Y_1,\dots,Y_n$ *sunt n soluții particulare ale sistemului* (2)*, liniar dependente pe I, atunci* $W(x) = 0, \forall\ x \in I$.

Demonstrație. Prin ipoteză, există $\alpha_1,\dots,\alpha_n \in \mathbb{R}$, nu toate nule, astfel încât

$$\alpha_1 Y_1(x) + \dots + \alpha_n Y_n(x) = 0, \ \forall\ x \in I,$$

relație echivalentă cu:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11}(x) + \dots + \alpha_n y_{1n}(x) = 0 \\ \hline \alpha_1 y_{n1}(x) + \dots + \alpha_n y_{nn}(x) = 0, \ \forall\ x \in I \end{cases}. \tag{3}$$

Deoarece (3) este un sistem (algebric) liniar şi omogen, care admite soluție nebanală, rezultă că determinantul coeficienților este zero. Dar, determinantul coeficienților este chiar wronskianul soluțiilor $Y_1,\ldots,Y_n$. Aşadar, $W\left(Y_1,\ldots,Y_n\right)(x)=0$, $\forall\ x\in I$. ■

Teorema 2.2.1. (Liouville) *Fie* $Y_1,\ldots,Y_n$, *n soluții particulare ale sistemului omogen (*2) *şi fie* $x_0\in I$ *oarecare fixat. Atunci,* $\forall\ x \in I$, *avem:*

$$W(x)=W\left(x_0\right)e^{\int_{x_0}^{x}[a_{11}(t)+\ldots+a_{nn}(t)]\mathrm{d}t}. \tag{4}$$

Demonstrație. Pentru simplificarea scrierii, considerăm cazul particular $n = 2$. Fie deci $Y_1=\begin{pmatrix} y_{11}\\ y_{21}\end{pmatrix}$ şi $y_2=\begin{pmatrix} y_{12}\\ y_{22}\end{pmatrix}$ soluții particulare pentru (2). Wronskianul acestor soluții este:

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12}\\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix},\quad x\in I.$$

Deoarece Y_1 şi Y_2 sunt soluții pentru sistemul (2), avem:

$$\begin{cases}\dfrac{dy_{11}}{dx}=a_{11}\,y_{11}+a_{12}\,y_{21}\\[2mm] \dfrac{dy_{21}}{dx}=a_{21}\,y_{11}+a_{22}\,y_{21}\end{cases} \quad \text{şi} \quad \begin{cases}\dfrac{dy_{12}}{dx}=a_{11}\,y_{12}+a_{12}\,y_{22}\\[2mm] \dfrac{dy_{22}}{dx}=a_{21}\,y_{12}+a_{22}\,y_{22}\end{cases}. \tag{5}$$

Ținând seama de modul de derivare al unui determinant, de identitățile (5) şi de proprietățile determinanților, rezultă:

$$\frac{dW}{dx}=\begin{vmatrix}\dfrac{dy_{11}}{dx} & \dfrac{dy_{12}}{dx}\\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12}\\ \dfrac{dy_{21}}{dx} & \dfrac{dy_{22}}{dx}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}y_{11}+a_{12}y_{21} & a_{11}y_{12}+a_{12}y_{22}\\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12}\\ a_{11}y_{11}+a_{22}y_{21} & a_{21}y_{12}+a_{22}y_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11}y_{11} & a_{11}y_{12}\\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12}\\ a_{22}y_{21} & a_{22}y_{22}\end{vmatrix}=$$

$$=\left(a_{11}+a_{22}\right)\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12}\\ y_{21} & y_{22}\end{vmatrix}.$$

Aşadar, avem

$$\frac{dW}{dx}=\left[a_{11}(x)+a_{22}(x)\right]W(x),\quad x\in I. \tag{6}$$

Observăm că (6) este o ecuație diferențială liniară şi omogenă, de ordinul întâi. Soluția sa generală este

$$W(x)=C\cdot e^{\int_{x_0}^{x}[a_{11}(t)+a_{22}(t)]\mathrm{d}t},\ x\in I,$$

unde $C\in\mathbb{R}$ este o constantă arbitrară. Deoarece $W(x_0)=C$, rezultă:

$$W(x)=W(x_0)\,e^{\int_{x_0}^{x}[a_{11}(t)+a_{22}(t)]\mathrm{d}t},\ x\in I.\ \blacksquare$$

Definiția 2.2.2. Se numeşte *sistem fundamental de soluții* ale sistemului omogen (2), orice set de n soluții particulare ale acestui sistem, $Y_1,\ldots,Y_n$, cu proprietatea că există $x_0\in I$, astfel încât $W[Y_1,\ldots,Y_n](x_0)\neq 0$.

Corolarul 2.2.1. *Dacă $Y_1,\ldots,Y_n$ este un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen* (2)*, atunci $W[Y_1,\ldots,Y_n](x)\neq 0$, $\forall\ x\in I$.*

Afirmația rezultă din Teorema Liouville. ■

Observația 2.2.2. Din Propoziția 2.2.2 şi Corolarul 2.2.1, rezultă că dacă $Y_1,\ldots,Y_n$ este un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen (2), atunci $Y_1,\ldots,Y_n$ sunt liniar independente pe intervalul *I*.

Teorema 2.2.2. *Dacă $Y_1,\ldots,Y_n$ este un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen* (2)*, atunci oricare ar fi Y soluție a acestui sistem, există*
$C_1,\ldots,C_n\in\mathbb{R}$ *astfel încât*

$$Y=C_1Y_1+\ldots+C_nY_n.$$

Demonstrație.

Fie $Y_1=\begin{pmatrix}y_{11}\\ \vdots\\ y_{n1}\end{pmatrix},\ldots,\ Y_n=\begin{pmatrix}y_{1n}\\ \vdots\\ y_{nn}\end{pmatrix},\ Y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$ şi $x_0\in I$ oarecare, fixat.

Considerăm următorul sistem

$$\begin{cases} \alpha_1 y_{11}(x_0) + ... + \alpha_n y_{1n}(x_0) = y_1(x_0) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots . \\ \alpha_1 y_{n1}(x_0) + ... + \alpha_n y_{nn}(x_0) = y_n(x_0) \end{cases} \tag{7}$$

Deoarece determinantul coeficienților sistemului (7) este chiar wronskianul soluțiilor $Y_1,\ldots,Y_n$ şi acesta este diferit de zero prin ipoteză, rezultă că sistemul (7) admite soluție unică.

Fie $(C_1,C_2,\ldots,C_n)$ soluția unică a sistemului (7) şi fie $Z = C_1Y_1 + \ldots + C_nY_n$. Din Propoziția 2.2.1, rezultă că Z este soluție pentru sistemul omogen (2). Pe de altă parte, observăm că $Z(x_0) = Y(x_0)$. Din Teorema de existență şi unicitate rezultă că $Z = Y$, deci $Y = C_1Y_1 + \ldots + C_nY_n$.

■

Observația 2.2.3. Din Teorema 2.2.2, rezultă că, dacă cunoaştem n soluții particulare ale sistemului omogen (2), $Y_1,\ldots,Y_n$ şi acestea formează un sistem fundamental de soluții, atunci soluția generală a sistemului omogen este:

$$Y = C_1Y_1 + \ldots + C_nY_n, \tag{8}$$

unde $C_1,\ldots,C_n$ sunt constante arbitrare.

În continuare, prezentăm *metoda variației constantelor a lui Lagrange* pentru rezolvarea sistemelor neomogene.

Pentru simplificarea scrierii, considerăm cazul particular $n = 2$.

Fie deci, următorul sistem neomogen

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}\,y_1 + a_{12}\,y_2 + b_1 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}\,y_1 + a_{22}\,y_2 + b_2 \end{cases}. \tag{9}$$

Fie, de asemenea, $Y_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \end{pmatrix}$ şi $Y_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \end{pmatrix}$ un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen asociat. Atunci avem:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_{11}}{dx} = a_{11}\,y_{11} + a_{12}\,y_{21} \\ \dfrac{dy_{21}}{dx} = a_{21}\,y_{11} + a_{22}\,y_{21} \end{cases} \text{ şi } \begin{cases} \dfrac{dy_{12}}{dx} = a_{11}\,y_{12} + a_{12}\,y_{22} \\ \dfrac{dy_{22}}{dx} = a_{21}\,y_{12} + a_{22}\,y_{22} \end{cases}. \tag{10}$$

Din Observația 2.2.3, deducem că soluția generală a sistemului omogen este

$$\begin{cases} y_{10} = C_1 y_{11} + C_2 y_{12} \\ y_{20} = C_1 y_{21} + C_2 y_{22}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \end{cases}. \tag{11}$$

Căutăm soluția sistemului neomogen (9) de forma

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x)\, y_{11} + \varphi_2(x)\, y_{12} \\ y_2 = \varphi_1(x)\, y_{21} + \varphi_2(x)\, y_{22} \end{cases}. \tag{12}$$

Punând condiția ca (12) să verifice sistemul (9), obținem:

$$\begin{cases} \varphi_1' y_{11} + \varphi_2' y_{12} + \varphi_1 y_{11}' + \varphi_2 y_{12}' = a_{11}(\varphi_1 y_{11} + \varphi_2 y_{12}) + a_{12}(\varphi_1 y_{21} + \varphi_2 y_{22}) + b_1 \\ \varphi_1' y_{21} + \varphi_2' y_{22} + \varphi_1 y_{21}' + \varphi_2 y_{22}' = a_{12}(\varphi_1 y_{11} + \varphi_2 y_{12}) + a_{22}(\varphi_1 y_{21} + \varphi_2 y_{22}) + b_2 \end{cases}.$$

Ținând seama de identitățile (10), rezultă

$$\begin{cases} \varphi_1'(x) y_{11} + \varphi_2'(x) y_{12} = b_1(x) \\ \varphi_1'(x) y_{21} + \varphi_2'(x) y_{22} = b_2(x), \qquad x \in I. \end{cases} \tag{13}$$

Deoarece determinantul coeficienților este chiar wronskianul soluției Y_1, Y_2 şi acesta este diferit de zero pe I, rezultă că sistemul (13) are soluție unică.

Fie $\varphi_1'(x) = g_1(x)$ şi $\varphi_2'(x) = g_2(x)$, $x \in I$, soluția unică a sistemului (13). Integrând, obținem:

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \int g_1(x)\,dx + C_1 \\ \varphi_2(x) = \int g_2(x)\,dx + C_2 \end{cases}. \tag{14}$$

În sfârşit, înlocuind (14) în (12), obținem soluția generală a sistemului neomogen (9), anume:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 y_{11} + C_2 y_{12} + y_{11} \int g_1(x)\,dx + y_{12} \int g_2(x)\,dx \\ y_2 = C_1 y_{21} + C_2 y_{22} + y_{21} \int g_1(x)\,dx + y_{22} \int g_2(x)\,dx \end{cases}. \tag{15}$$

Dacă notăm cu

$$\begin{cases} y_{1p} = y_{11} \int g_1(x)\,dx + y_{12} \int g_2(x)\,dx \\ y_{2p} = y_{21} \int g_1(x)\,dx + y_{22} \int g_2(x)\,dx \end{cases}$$

şi cu

$$Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix}, \; Y_p = \begin{pmatrix} y_{1p} \\ y_{2p} \end{pmatrix},$$

atunci soluția generală a sistemului neomogen (9) este de forma

$$Y = Y_0 + Y_p, \tag{15'}$$

unde Y_0 este soluția generală a sistemului omogen, iar Y_p este o soluție particulară a sistemului neomogen.

Observația 2.2.4. În principiu, rezolvarea sistemului neomogen este întotdeauna posibilă dacă se cunoaşte un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen. Într-adevăr, fie $Y_1,\ldots,Y_n$ un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen. Atunci

$$Y_0 = C_1Y_1 + \ldots + C_nY_n \tag{16}$$

este soluția generală a sistemului omogen.

Căutăm soluția generală a sistemului neomogen de forma:

$$Y = \varphi_1(x)Y_1 + \ldots + \varphi_n(x)Y_n\,. \tag{17}$$

Funcțiile $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ se determină după cum urmează. Se consideră sistemul:

$$\begin{cases} \varphi_1'(x)y_{11} + \ldots + \varphi_n'(x)y_{1n} = b_1(x) \\ \text{-------------------------} \\ \varphi_1'(x)y_{n1} + \ldots + \varphi_n'(x)y_{nn} = b_n(x) \end{cases}. \tag{18}$$

Sistemul (18) are soluție unică. Fie $\varphi_1'(x) = g_1(x),\ldots,\varphi_n'(x) = g_n(x)$ soluția acestui sistem.

Integrând, găsim:

$$\varphi_1(x) = \int g_1(x)\,dx + C_1,\ldots,\varphi_n(x) = \int g_n(x)\,dx + C_n\,. \tag{19}$$

Înlocuind (19) în (17) se obține soluția generală a sistemului neomogen.

Din păcate, pentru sisteme cu coeficienți variabili este dificil de aflat un sistem fundamental de soluții pentru sistemul omogen. Acest lucru este posibil în cazul sistemelor cu coeficienți constanți. În continuare, vom studia astfel de sisteme.

Fie sistemul:

$$\frac{dY}{dx} = AY\,, \tag{20}$$

unde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ este o matrice constantă (a_{ij} , $i, j = \overline{1,n}$, sunt constante reale).

Reamintim că, prin definiție, *derivata unei matrice* ale cărei elemente sunt funcții derivabile, este matricea formată cu derivatele acestor elemente. Aşadar,

$$\begin{pmatrix} f_{11}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ f_{n1}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{pmatrix}' \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} f_{11}'(x) & \ldots & f_{1n}'(x) \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ f_{n1}'(x) & \ldots & f_{nn}'(x) \end{pmatrix},\ x \in I\,,$$

dacă $f_{ij} : I \to \mathbb{R}$ sunt derivabile, $\forall\ i, j = \overline{1,n}$.

În particular, $(Ax)' = A$.

Prin inducție matematică se demonstrează imediat că

$$\left[(Ax)^k\right]' = k \cdot A(Ax)^{k-1}, \; k \geq 1, \; k \in \mathbb{N}.$$

Cum $e^{Ax} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ax)^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$ şi convergența este uniformă (Vezi [7], 3.6.1), rezultă că

$$\left(e^{Ax}\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot A \cdot (Ax)^{k-1}}{k!} = A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(Ax)^{k-1}}{(k-1)!} = Ae^{Ax}.$$

Aşadar, avem

$$\left(e^{Ax}\right)' = Ae^{Ax}, \; x \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Teorema 2.2.2. *Soluția generală a sistemului* (20) *este:*

$$Y = e^{Ax} C, \tag{22}$$

unde $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{pmatrix}$ *este un vector constant oarecare* ($C_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,n}$).

Demonstrație. Din (21), rezultă imediat că $\frac{dY}{dx} = Ae^{Ax}C$. Înlocuind în (20), obținem identitatea $Ae^{Ax}C = Ae^{Ax} \cdot C$, deci (22) este soluție pentru (20). ■

Exemplul 2.2.1. Să se rezolve sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -2y_1 + y_2 + 2x + 3 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -4y_1 + 3y_2 + 4x - 1 \end{cases}. \tag{23}$$

Sistemul omogen asociat este:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -2y_1 + y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -4y_1 + 3y_2 \end{cases}. \tag{24}$$

Conform Teoremei 2.2.2, soluția generală a sistemului (24) este $Y = e^{Ax}C$, unde $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ şi $C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$.

Matricea e^{Ax} se calculează uşor, dacă matricea A se poate aduce la forma diagonală. În cazul nostru acest lucru este posibil. Într-adevăr, valorile proprii ale matricei A sunt $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

Cum $\lambda_1 \neq \lambda_2$, există o bază formată din vectori proprii. O astfel de bază este $v_1 = (1,4)$, $v_2 = (1,1)$.

Matricea de trecere de la baza canonică la această nouă bază este:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \text{ iar } T^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

În raport cu noua bază, matricea A are forma diagonală $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Din proprietățile funcției $A \to e^A$ (vezi [7], 3.6.2) rezultă că

$$e^{Dx} = \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix}$$

şi

$$e^{Ax} = T \cdot e^{Dx} T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}e^{2x} + \frac{4}{3}e^{-x} & \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x} \\ -\frac{4}{3}e^{2x} + \frac{4}{3}e^{-x} & \frac{4}{3}e^{2x} - \frac{1}{3}e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Soluția generală a sistemului omogen (24) este:

$$Y_0 = \begin{pmatrix} y_{10} \\ y_{20} \end{pmatrix} = e^{Ax} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{C_1}{3}e^{2x} + \frac{4}{3}C_1 e^{-x} + \frac{1}{3}C_2 e^{2x} - \frac{1}{3}C_2 e^{-x} \\ -\frac{4}{3}C_1 e^{2x} + \frac{4}{3}C_1 e^{-x} + \frac{4}{3}C_2 e^{2x} - \frac{1}{3}C_2 e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Dacă introducem notațiile $K_1 = \dfrac{C_2 - C_1}{3}$, $K_2 = \dfrac{4C_1 - C_2}{3}$, rezultă

$$\begin{cases} y_{10} = K_1 e^{2x} + K_2 e^{-x} \\ y_{20} = 4K_1 e^{2x} + K_2 e^{-x} \end{cases}. \tag{25}$$

((25) reprezintă soluția generală a sistemului omogen (24)).

Pentru a găsi soluția sistemului neomogen, folosim *metoda variației constantelor a lui Lagrange*. Căutăm soluția sistemului neomogen de forma:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x)e^{2x} + \varphi_2(x)e^{-x} \\ y_2 = 4\varphi_1(x)e^{2x} + \varphi_2(x)e^{-x} \end{cases}. \tag{26}$$

Funcțiile φ_1' şi φ_2' verifică sistemul:

$$\begin{cases} \varphi_1'(x)e^{2x} + \varphi_2'(x)e^{-x} = 2x+3 \\ 4\varphi_1'(x)e^{2x} + \varphi_2'(x)e^{-x} = 4x-1. \end{cases}$$

Rezolvând acest sistem, obținem:

$$\varphi_1'(x) = \frac{2x-4}{3}e^{-2x},\ \varphi_2'(x) = \frac{4x+13}{3}e^{x}$$

şi mai departe:

$$\varphi_1(x) = \frac{-2x+3}{6}e^{-2x} + C_1,\ \varphi_2(x) = \frac{4x+9}{3}e^{x} + C_2. \tag{27}$$

Înlocuind (27) în (26), rezultă soluția generală a sistemului (23):

$$\begin{cases} y_1 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + x + \dfrac{7}{2} \\ y_2 = 4C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + 5. \end{cases}$$

Observația 2.2.5 La acelaşi rezultat se ajunge şi dacă se foloseşte *metoda eliminării*, pe care o vom descrie în continuare.

Se derivează una din ecuațiile sistemului (23), de exemplu, prima şi se elimină y_2 şi y_2' din ecuațiile sistemului şi din ecuația derivată, obținându-se în final o ecuație diferențială liniară de ordinul doi, cu coeficienți constanți în necunoscuta y_1.

Să reluăm, folosind metoda eliminării, rezolvarea sistemului (23):

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = -2y_1 + y_2 + 2x + 3 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -4y_1 + 3y_2 + 4x - 1. \end{cases}$$

Derivând prima ecuație, obținem:

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} = -2\frac{dy_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} + 2. \tag{28}$$

Din prima ecuație a sistemului, deducem că

$$y_2 = \frac{dy_1}{dx} + 2y_1 - 2x - 3\,. \tag{29}$$

Ținând seama de a doua ecuație a sistemului, rezultă

$$\frac{dy_2}{dx} = -4y_1 + 3\left(\frac{dy_1}{dx} + 2y_1 - 2x - 3\right) + 4x - 1$$

şi mai departe

$$\frac{dy_2}{dx} = 2y_1 + 3\frac{dy_1}{dx} - 2x - 10\,. \tag{30}$$

Înlocuind (30) în (28), obținem următoarea ecuație diferențială de ordinul doi:

$$y_1'' - y_1' - 2y_1 = -2x - 8\,. \tag{31}$$

Ecuația omogenă asociată este $y_1'' - y_1' - 2y_1 = 0$, iar ecuația sa caracteristică este $r^2 - r - 2 = 0$. Rădăcinile ecuației caracteristice sunt $r_1 = 2$, $r_2 = -1$, deci soluția generală a ecuației omogene este $y_{10} = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$. Căutăm o soluție a ecuației neomogene (31) de forma membrului drept (pentru că nu avem rezonanță):

$$y_{1p} = ax + b\,. \tag{32}$$

Punând condiția ca (32) să verifice ecuația (31), obținem $a = 1$, $b = \frac{7}{2}$. Aşadar, soluția generală a ecuației (31) este

$$y_1 = C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + x + \frac{7}{2}\,. \tag{33}$$

Înlocuind (33) în (29) rezultă că: $y_2 = 4C_1e^{2x} + C_2e^{-x} + 5$. În consecință, soluția sistemului (23) este:

$$\begin{cases} y_1 = C_1\,e^{2x} + C_2\,e^{-x} + x + \frac{7}{2} \\ y_2 = 4C_1\,e^{2x} + C_2e^{-x} + 5\,, \end{cases}$$

aceeaşi soluție ca şi cea obținută cu metoda matriceală.

Observația 2.2.6. Metoda matriceală pentru rezolvarea sistemelor liniare omogene cu coeficienți constanți se aplică şi în cazul când matricea A nu se poate diagonaliza, folosindu-se în acest caz pentru calculul matricei e^{Ax} forma canonică Jordan a lui A. Pentru detalii vezi [2].

CAPITOLUL 3

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL ÎNTÂI

3.1. Sisteme autonome de ecuații diferențiale

Prin *sistem autonom de ecuații diferențiale*, se înțelege un sistem de forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(y_1,\dots,y_n) \\ \text{-------------} \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(y_1,\dots,y_n) \end{cases}, \tag{1}$$

unde f_i sunt funcții continue pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^n$. Se observă că în cazul sistemelor autonome, variabila independentă x nu apare printre argumentele funcțiilor f_i.

Definiția 3.1.1. O funcție $\psi : D \to \mathbb{R}$ se numeşte *integrală primă* pentru sistemul (1), dacă:

a) $\psi \in \mathscr{C}^{(1)}(D)$;

b) ψ nu este o funcție constantă pe D;

c) Pentru orice soluție $y_1 = \varphi_1(x),\dots,y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$, a sistemului (1), există o constantă $c \in \mathbb{R}$, care depinde de această soluție, astfel încât $\psi\left[\varphi_1(t),\dots,\varphi_n(t)\right] = c$, $\forall\ t \in I$.

Exemplul 3.1.1. Fie sistemul autonom de ecuații diferențiale

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = y_2 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = -y_1 \end{cases}, \ (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2. \tag{2}$$

Folosind metoda eliminării se obține imediat soluția generală a sistemului (2), anume:

$$\begin{cases} y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x \\ y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x \end{cases}. \tag{3}$$

Observăm că funcția $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definită prin $\psi(y_1, y_2) = y_1^2 + y_2^2$, $\forall (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, este o integrală primă pentru sistemul (2). Într-adevăr,

$$\psi[C_1 \cos x + C_2 \sin x,\ -C_1 \sin x + C_2 \cos x] = C_1^2 + C_2^2 = \text{constant}.$$

Teorema 3.1.1. *Dacă f_i sunt continue și lipschitziene pe D, atunci o funcție $\psi \in \mathscr{C}^{(1)}(D)$ este integrală primă pentru sistemul* (1) *dacă și numai dacă:*

$$f_1(y)\frac{\partial \psi}{\partial y_1}(y) + \ldots + f_n(y)\frac{\partial \psi}{\partial y_n}(y) = 0, \ \forall \ \ y = (y_1, \ldots, y_n) \in D. \tag{4}$$

Demonstrație. ***Necesitatea***. *Fie $x_0 \in \mathbb{R}$ și $y_0 = (y_{10}, \ldots, y_{n0}) \in D$* oarecare fixat. Din Teorema de existență și unicitate pentru sisteme, rezultă că există o soluție unică a sistemului (1), $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$, cu proprietatea $\varphi_1(x_0) = y_{10}, \ldots, \varphi_n(x_0) = y_{n0}$.

Dacă $\psi : D \to \mathbb{R}$ este integrală primă pentru (1), atunci

$$\psi[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)] = C, \ \forall x \in I. \tag{5}$$

Derivând (5), rezultă:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1}[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)] \cdot \frac{d\varphi_1(x)}{dx} + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)] \cdot \frac{d\varphi_n(x)}{dx} = 0, \ \forall \ x \in I.$$

Ținând seama că $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ verifică sistemul (1), mai departe, avem:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1}[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)] \cdot f_1[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)] + \ldots$$

$$+ \frac{\partial \psi}{\partial y_n}[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)] \cdot f_n[\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)] = 0, \ \forall x \in I.$$

În particular, pentru $x = x_0$, rezultă

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_1}(y_0) f_1(y_0) + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n}(y_0) f_n(y_0) = 0.$$

Cum $y_0 \in D$ a fost arbitrar, rezultă că ψ verifică (4) pe *D*.

Suficiența. Fie $y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_n = \varphi_n(x)$, $x \in I$, o soluție oarecare a sistemului (1).

Atunci $\left(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)\right)\in D$, $\forall\, x\in I$ şi

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=f_1\left[\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)\right],\ldots,\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}=f_n\left[\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)\right],\ \forall\, x\in I\,.$$

Dacă $\psi\in\mathscr{C}^{(1)}(D)$ verifică (4) pentru $\forall y\in D$, atunci avem:

$$\frac{\partial\psi}{\partial y_1}\left[\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)\right]\cdot\frac{d\varphi_1}{dx}+\ldots+\frac{\partial\psi}{\partial y_n}\left[\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)\right]\cdot\frac{d\varphi_n}{dx}=0\,,\ \forall\ x\in I\,,$$

relație echivalentă cu

$$\frac{d}{dx}\psi\left[\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)\right]=0\,,\ \forall\, x\in I\,,$$

de unde rezultă că

$$\psi\left[\varphi_1(x),\ldots,\varphi_n(x)\right]=c\,,\ \forall\, x\in I\,.$$

Aşadar, ψ este integrală primă pentru sistemul (1). ■

Teorema 3.1.2. *Presupunem că* $f_i:D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ *sunt continue, lipschitziene şi* $\sum_{i=1}^{n}f_i^2(y)\neq 0$, $\forall\ y\in D$*. Atunci, sistemul* (1) *admite cel mult* $(n-1)$ *integrale prime independente.*

Demonstrație. Presupunem $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_n$ sunt integrale prime pentru sistemul (1). Din Teorema 3.1.1, rezultă:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_1}(y)f_1(y)+\ldots+\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_n}(y)f_n(y)=0\\ \text{-----------------------------------}\\ \dfrac{\partial\psi_n}{\partial y_1}(y)f_1(y)+\ldots+\dfrac{\partial\psi_n}{\partial y_n}(y)f_n(y)=0\end{cases},\ \forall y\in D. \tag{6}$$

Am obținut un sistem (algebric) liniar şi omogen în necunoscutele $f_1(y),f_2(y),\ldots,f_n(y)$. Deoarece sistemul admite soluții nebanale, rezultă că determinantul coeficienților este zero. Aşadar, avem:

$$\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_1}(y) & \cdots & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial y_n}(y)\\ \text{---} & \text{---} & \text{---}\\ \dfrac{\partial\psi_n}{\partial y_1}(y) & \cdots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial y_n}(y)\end{vmatrix}=0\,,\ \forall y\in D.\quad ■$$

Observația 3.1.1. În condițiile Teoremei 3.1.2, se poate arăta că sistemul (1) admite (n–1) integrale prime independente funcțional pe D. Ținând seama şi de Teorema 3.1.2, rezultă că sistemul (1) admite (n–1) integrale prime independente şi (n–1) este numărul maxim de integrale prime independente ale sistemului (1).

În continuare, vom presupune că funcțiile f_i satisfac condițiile din Teorema 3.1.2. Sistemul (1) se poate pune sub forma simetrică echivalentă:

$$\frac{y_1'}{f_1(y_1,\ldots,y_n)}=\frac{y_2'}{f_2(y_1,\ldots,y_n)}=\ldots=\frac{y_n'}{f_n(y_1,\ldots,y_n)}=1. \tag{7}$$

Prin *combinație integrabilă* a sistemului (6), se înțelege o ecuație diferențială, consecință a sistemului (7), uşor de integrat. Metoda combinațiilor integrabile este folosită pentru aflarea integralelor prime ale sistemului.

Exemplul 3.1.2. Să se afle două integrale prime independente ale sistemului autonom

$$\frac{y_1'}{y_2-y_3}=\frac{y_2'}{y_3-y_1}=\frac{y_3'}{y_1-y_2}. \tag{8}$$

Din proprietățile unui şir de rapoarte egale deducem

$$\frac{y_1'+y_2'}{y_2-y_1}=\frac{y_3'}{y_1-y_2}.$$

După simplificare rezultă $\frac{d}{dx}(y_1+y_2+y_3)=0$, deci $y_1+y_2+y_3=C_1$. Funcția $\psi_1(y_1,y_2,y_3)=y_1+y_2+y_3$ este integrală primă pentru (8). Pentru a obține o altă integrală primă facem următoarea combinație integrabilă: amplificăm succesiv primul raport cu y_1, al doilea cu y_2, al treilea cu y_3 şi folosind proprietățile şirurilor de rapoarte egale, rezultă:

$$\frac{y_1y_1'+y_2y_2'}{y_2y_3-y_1y_3}=\frac{y_3y_3'}{y_1y_3-y_2y_3}.$$

După ce simplificăm, obținem $\frac{d}{dx}\left(y_1^2+y_2^2+y_3^2\right)=0$, deci $y_1^2+y_2^2+y_3^2=C_2$. Funcția $\psi_2(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2$ este o altă integrală primă pentru sistemul (8).

3.2. Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi liniare şi omogene

Prin *ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară* se înțelege o ecuație de forma:

$$P_1(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\dots+P_n(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0, \tag{1}$$

unde P_i sunt funcții continue şi lipschitziene pe o mulțime deschisă $D\subset\mathbb{R}^n$ şi $\sum_{i=1}^{n}P_i^2(x)\neq 0$, $\forall\ x=(x_1,\dots,x_n)\in D$. Funcția $u=u(x_1,\dots,x_n)$ este *funcția necunoscută.*

Definiția 3.2.1. Se numeşte *soluție* a ecuației cu derivate parțiale (1) orice funcție φ definită pe o submulțime deschisă $D_1\subset D$, $\varphi\in\mathscr{C}^{(1)}(D_1)$, cu proprietatea:

$$P_1(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x)+\dots+P_n(x)\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x)=0,\ \forall\ \ x=(x_1,\dots,x_n)\in D_1.$$

Ecuației cu derivate parțiale (1) i se asociază sistemul simetric următor:

$$\frac{x_1'}{P_1(x)}=\frac{x_2'}{P_2(x)}=\dots=\frac{x_n'}{P_n(x)}=1. \tag{2}$$

Observația 3.2.1. Din Teorema 3.1.1 rezultă că orice integrală primă a sistemului (2) este soluție pentru ecuația cu derivate parțiale (1).

Mai general, are loc următoarea teoremă.

Teorema 3.2.1. *Fie $\psi_1,\dots,\psi_k$ integrale prime pentru sistemul* (2) *şi fie Φ o funcție de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ definită pe mulțimea deschisă $\Omega\subset\mathbb{R}^k$. Atunci, funcția $u(x)=\Phi[\psi_1(x),\dots,\psi_k(x)]$, $x\in D_1\subset D$, este soluție pentru ecuația cu derivate parțiale* (1).

(Se subînțelege că se presupune că $(\psi_1(x),\dots,\psi_k(x))\in\Omega$, $\forall\ x\in D_1$).

Demonstrație. Pentru orice $x\in D_1$, avem:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_1} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y_1}(y) \cdot \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + \dfrac{\partial \phi}{\partial y_k}(y) \cdot \dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_1}(x) \\ ------------------------------ \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n} = \dfrac{\partial \phi}{\partial y_1}(y) \cdot \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) + \ldots + \dfrac{\partial \phi}{\partial y_k}(y) \cdot \dfrac{\partial \psi_k}{\partial x_n}(x) \quad , \quad y = (\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)) \in \Omega \end{cases} . \tag{3}$$

Ținând seama de (3) şi de Observația 3.2.1, deducem:

$$\sum_{i=1}^{n} P_i(x) \cdot \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{\partial \phi}{\partial y_1}(y) \cdot \left[P_1(x) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + P_n(x) \cdot \frac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) \right] + \ldots$$

$$+ \frac{\partial \phi}{\partial y_k}(y) \cdot \left[P_1(x) \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial x_1}(x) + \ldots + P_n(x) \cdot \frac{\partial \psi_k}{\partial x_n}(x) \right] = 0 \text{ , } \forall\, x \in D_1 .$$

Aşadar, $u = \Phi[\psi_1(x), \ldots, \psi_k(x)]$, $x \in D_1$, este soluție a ecuației (1), $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$. ■

Următoarea teoremă ne arată că orice soluție a ecuației (1) este de această formă.

Teorema 3.2.2. *Fie* $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$, $(n-1)$ *integrale prime independente ale sistemului* (2) *şi fie* $u = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D_1 \subset D$, *o soluție oarecare a ecuației* (1). *Atunci, există o funcție* Φ *de clasă* $\mathscr{C}^{(1)}$ *pe o mulțime deschisă* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *astfel încât* $(\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)) \in \Omega$, $\forall\, x \in D_1$ *şi*

$$\varphi(x) = \Phi[\psi_1(x), \ldots, \psi_{n-1}(x)] \text{ , } \forall\ x \in D_1 .$$

Demonstrație. Deoarece $\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ sunt soluții pentru (1), rezultă:

$$\begin{cases} P_1(x) \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}(x) + \ldots + P_n(x) \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_n}(x) = 0 \\ P_1(x) \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1}(x) + \ldots + P_n(x) \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n}(x) = 0 \\ -------------------------- \\ P_1(x) \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_1}(x) + \ldots + P_n(x) \dfrac{\partial \psi_{n-1}}{\partial x_n}(x) = 0 \quad , \ \forall\ x \in D_1 \end{cases} . \tag{4}$$

Deoarece $\sum_{i=1}^{n} P_i^2(x) \neq 0$, $\forall\, x \in D_1$, rezultă că sistemul liniar şi omogen (4) admite soluții nebanale pentru orice $x \in D_1$, deci determinantul coeficienților este zero:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}(x) \\ ------ & ------ & ------ \\ \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix} = 0, \ \forall\, x \in D_1 .$$

Cum prin ipoteză, funcțiile $\psi_1,\dots,\psi_{n-1}$ sunt independente funcțional, rezultă că:

$$\text{rang}\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_n}(x) \\ ------ & ------ & ------ \\ \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_1}(x) & \dots & \frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = n-1, \ \forall\, x \in D_1 .$$

Din Teorema 4.11.2 din [7], rezultă că φ depinde funcțional de $\psi_1,\dots,\psi_{n-1}$ pe D_1, deci că există $\Phi \in C^1(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ astfel încât

$$\varphi(x) = \Phi\left[\psi_1(x),\dots,\psi_{n-1}(x)\right], \ \forall\, x \in D_1 . \quad \blacksquare$$

Exemplul 3.2.1. Să se afle soluția generală a ecuației cu derivate parțiale

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = 0 .$$

Sistemul simetric asociat este:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{zz'}{\sqrt{x^2+y^2}} .$$

Din $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$ deducem $\frac{y}{x} = C_1$, deci $\psi_1(x,y,z) = \frac{y}{x}$ este o integrală primă. Pentru a obține o a doua integrală primă procedăm astfel: amplificăm primul raport cu *x*, al doilea raport cu *y* şi folosim proprietățile şirurilor de rapoarte egale. Rezultă

$$\frac{xx'+yy'}{x^2+y^2} = \frac{zz'}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

şi mai departe

$$\frac{xx'+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = zz' ,$$

egalitate echivalentă cu

$$\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)' = \left(\frac{z^2}{2}\right)'.$$

Integrând rezultă $\sqrt{x^2+y^2}-\frac{z^2}{2}=C_2$, deci $\psi_2(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}-\frac{z^2}{2}$, este integrală primă.

Soluția generală a ecuației va fi: $u(x,y,z)=\Phi\left(\frac{y}{x},\ \sqrt{x^2+y^2}-\frac{z^2}{2}\right)$, unde $\Phi\in\mathscr{C}^{(1)}\left(\mathbb{R}^2\right)$ este o funcție arbitrară, iar $xyz\neq 0$.

Definiția 3.2.2. Fie $a\in\mathbb{R}$ şi $A\subset\mathbb{R}^{n-1}$ o mulțime deschisă cu proprietatea $(x_1,\dots,x_{n-1},a)\in D$, $\forall\,(x_1,\dots,x_{n-1})\in A$. Fie, de asemenea, $g : A\to\mathbb{R}$ o funcție de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$.

Problema Cauchy pentru ecuația (1) *şi funcția g* constă în determinarea unei soluții $u=u(x_1,\dots,x_n)$ a ecuației (1), care satisface următoarea condiție pe mulțimea *A*:

$$u(x_1,\dots,x_{n-1},a)=g(x_1,\dots,x_{n-1}). \tag{5}$$

În cazul $n=2$, problema Cauchy are o interpretare geometrică simplă: să se găsească suprafața $z=z(x,y)$ [soluție a ecuației $P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$] care trece prin curba $y=a$, $z=g(x)$.

Teorema 3.2.3. *Dacă există* $(n-1)$ *integrale prime independente ale sistemului simetric asociat* (2)*, atunci problema Cauchy* (1)-(5) *are o soluție unică* $u:D_1\to\mathbb{R}$*,* $D_1\subset D$.

Demonstrație. Fie $a\in\mathbb{R}, g\in\mathscr{C}^{(1)}(A)$, $A\subset\mathbb{R}^{n-1}$ deschisă cu proprietatea că

$$(x_1,\dots,x_{n-1},a)\in D,\ \forall\,(x_1,\dots,x_{n-1})\in A.$$

Fie $\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1}$, $(n-1)$ integrale prime, independente funcțional pe *D*. Rezultă că

$$\frac{D(\varphi_1,\dots,\varphi_{n-1})}{D(x_1,\dots,x_{n-1})}(x_1,\dots,x_{n-1},a)\neq 0,\ \forall\,(x_1,\dots,x_{n-1})\in A.$$

Fie $F : A\subset\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^{n-1}$ definită astfel:

$$F(x_1,\dots,x_{n-1})=\left(\varphi_1(x_1,\dots,x_{n-1},a),\dots,\varphi_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1},a)\right),\ (x_1,\dots,x_{n-1})\in A.$$

Din Teorema de inversiune locală (Teorema 4.8.2 din [7]), rezultă că, pentru orice punct $M(x_1,\ldots,x_{n-1})\in A$, există o vecinătate deschisă A_1 a punctului M, $A_1\subset A$ şi o vecinătate deschisă B_1 a punctului $F(M)$, astfel încât $F:A_1\to B_1$ este difeomorfism.

Fie $F^{-1}=(\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}):B_1\to A_1$, inversa funcției $F:A_1\to B_1$.

Definim

$$u(x)=g\left[\omega_1(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{n-1}(x)),\ldots,\omega_{n-1}(\varphi_1(x),\ldots,\varphi_{n-1}(x))\right], \tag{6}$$

$\forall\ x=(x_1,\ldots,x_{n-1},\,x_n)\in D$, cu proprietatea că $(x_1,\ldots,x_{n-1})\in A_1$.

Din Teorema 3.2.1, rezultă că, funcția definită în (6) este soluție pentru (1). Pe de altă parte, observăm că $u(x_1,\ldots,x_{n-1},\,a)=g\left[\left(F^{-1}\circ F\right)(x_1,\ldots,x_{n-1})\right]=g(x_1,\ldots,x_{n-1})$, oricare ar fi $(x_1,\ldots,x_{n-1})\in A_1$, deci funcția definită în (5) este soluția problemei Cauchy (1)-(5). Unicitatea rezultă din unicitatea funcțiilor $\omega_1,\ldots,\omega_{n-1}$. ■

Exemplul 3.2.2. Să se rezolve problema Cauchy

$$\begin{cases} y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=0,\ x>0\\ y=0,\ z=x\,. \end{cases}$$

Sistemul simetric este $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{-x}$ sau $xx'+yy'=0$, de unde rezultă integrala primă $x^2+y^2=c$. Soluția generală este $z=\phi\left(x^2+y^2\right)$, unde ϕ este o funcție arbitrară de clasă $\mathscr{C}^{(2)}$ pe $\mathbb{R}^2$. Din relațiile $x^2+y^2=c$, $y=0$, $z=x$ deducem $x=\sqrt{c}$ şi mai departe $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Aşadar, soluția problemei Cauchy este $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $x>0$.

3.3. *Ecuații cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasiliniare*

O *ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi cvasiliniară* este de forma:

$$P_1(x_1,\ldots,x_n,\,u)\frac{\partial u}{\partial x_1}+\ldots+P_n(x_1,\ldots,x_n,\,u)\frac{\partial u}{\partial x_n}=P_{n+1}(x_1,\ldots,x_n,\,u)\,, \tag{1}$$

unde P_i sunt funcții continue şi lipschitziene pe o mulțime deschisă $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ şi $\sum_{i=1}^{n+1} P_i^2 \neq 0$ pe D.

Căutăm soluția ecuației (1) sub forma funcției implicite $u = u(x_1, \ldots, x_n)$, definită de ecuația $V(x_1, \ldots, x_n, u) = 0$, unde V este o funcție de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ pe D şi $\frac{\partial V}{\partial u} \neq 0$ pe D.

Din Teorema funcțiilor implicite, rezultă că

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{\frac{\partial V}{\partial u}}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2}$$

Înlocuind (2) în (1), rezultă:

$$P_1(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_1} + \ldots + P_n(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial x_n} + P_{n+1}(x_1, \ldots, x_n, u)\frac{\partial V}{\partial u} = 0. \tag{3}$$

Am obținut astfel o ecuație cu derivate parțiale de ordinul întâi liniară. Soluția ecuației (3) este de forma $V = \phi\left[\varphi_1(x_1, \ldots, x_n, u), \ldots, \varphi_n(x_1, \ldots, x_n, u)\right]$, $(x_1, \ldots, x_n, u) \in \Omega$, unde $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sunt n integrale prime independente ale sistemului $\frac{x_1'}{P_1} = \ldots = \frac{x_n'}{P_n} = \frac{u'}{P_{n+1}}$.

Exemplul 3.3.2. Să se afle soluția generală a ecuației

$$2y\frac{\partial z}{\partial x} + 3x^2\frac{\partial z}{\partial y} + 6x^2 y = 0$$

şi apoi să se rezolve problema Cauchy $x = 0,\ y^2 = 2z$.

Sistemul simetric ataşat este:

$$\frac{x'}{2y} = \frac{y'}{3x^2} = \frac{z'}{-6x^2 y} = 1.$$

Din $3x^2 x' = 2yy'$, deducem $x^3 - y^2 = C_1$. Din $3x^2 x' = -z'$, deducem $x^3 + z = C_2$.

Soluția generală a ecuației este funcția $z = z(x, y)$, definită implicit de ecuația $\phi\left(x^3 - y^2, x^3 + z\right) = 0$, unde $\phi \in \mathscr{C}^{(1)}\left(\mathbb{R}^2\right)$ este o funcție arbitrară. Pentru a rezolva problema Cauchy eliminăm variabilele x, y, z între relațiile:

$$\begin{cases} x^3 - y^2 = C_1 \\ x^3 + z = C_2 \\ x = 0 \\ y^2 = 2z \end{cases}$$

şi obținem $C_1 + 2C_2 = 0$.

Înlocuind C_1 şi C_2 cu expresiile din membrul stâng, obținem:

$$x^3 - y^2 + 2\ x^3 + 2z = 0.$$

Rezultă că $z = \frac{1}{2}\left(y^2 - 3x^3\right)$ este soluția problemei Cauchy.

CAPITOLUL 4

SERII FOURIER. TRANSFORMATA FOURIER

4.1. Serii trigonometrice. Serii Fourier

Fie funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. Reamintim că punctul $x_0\in[a,b]$ se numeşte *punct de discontinuitate de prima speță* al funcției f dacă limitele laterale $f(x_0-0)$ şi $f(x_0+0)$ există şi sunt finite.

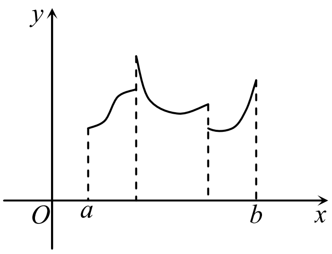


Fig.1

Definiția 4.1.1. Funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se numeşte *continuă pe porțiuni* dacă este continuă pe $[a,b]$, cu excepția unui număr finit de puncte de discontinuitate de prima speță (fig. 1).

O astfel de funcție este integrabilă.

Reamintim că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este *periodică de perioadă* T, dacă

$f(x+T)=f(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

Lema 4.1.1. *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcție periodică de perioadă* 2π. *Atunci*

$$\int_a^{a+2\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Demonstrație. Pentru aceasta este suficient să observăm că

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{a} f(x)\mathrm{d}x+\int_a^{a+2\pi} f(x)\mathrm{d}x+\int_{a+2\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x.$$

Cu schimbarea de variabilă $x=t-2\pi$, obținem

$$\int_{a+2\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{-\pi} f(t)\mathrm{d}t = -\int_{-\pi}^{a} f(t)\mathrm{d}t ,$$

deci

$$\int_{-\pi}^{a} f(x)\mathrm{d}x + \int_{a+2\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = 0 ,$$

de unde rezultă lema. ■

În general, dacă f are perioada T, atunci

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\mathrm{d}x = \int_{0}^{T} f(x)\mathrm{d}x .$$

Definiția 4.1.2. Fie $(\alpha_n)_{n\geq 0}$, $(\beta_n)_{n\geq 1}$ două şiruri de numere reale. Seria de funcții

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx) \tag{1}$$

se numeşte *serie trigonometrică de coeficienți* α_n, $n \geq 0$, β_n, $n \geq 0$. Sumele parțiale ale unei astfel de serii de funcții

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$$

se numesc *polinoame trigonometrice.*

Definiția 4.1.3. Fie funcția $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periodică de perioadă 2π, continuă pe porțiuni pe orice interval compact şi fie

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x ,\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x ,\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x ,\ n \geq 1 .$$

Atunci seria trigonometrică

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2}$$

se numeşte *seria Fourier ataşată funcției* f, iar coeficienții a_n, b_n se numesc *coeficienții Fourier ai funcției* f.

Definiția 4.1.4. Funcția $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ se numeşte *continuu diferențiabilă pe porțiuni* (sau *netedă pe porțiuni*) pe $[a,b]$ dacă este derivabilă pe $[a,b]$ cu excepția unui număr finit de puncte şi f' este continuă pe $[a,b]$ cu excepția acestor puncte în care are limite laterale finite.

Teorema 4.1.1. (Dirichlet). *Fie* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *o funcție periodică de perioadă* 2π, *continuu diferențiabilă pe porțiuni pe orice interval compact* $[a,b]\subset\mathbb{R}$. *Atunci seria Fourier* (2) *este convergentă pe* $\mathbb{R}$ *şi avem*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)=\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2},\ \forall x\in\mathbb{R},$$

unde

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N},\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Observația 4.1.1. Dacă, în plus, f este continuă pe $\mathbb{R}$, avem

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

(f se dezvoltă în serie Fourier pe $\mathbb{R}$).

Observația 4.1.2. Dacă funcția f este pară, atunci $b_n=0$, $n\in\mathbb{N}^*$. Dacă funcția f este impară, atunci $a_n=0$, $n\in\mathbb{N}$.

Exemplul 4.1.1. Să se dezvolte în serie Fourier pe intervalul $[-\pi,\pi]$ funcția $f(x)=x^2$.

Fie $f^*:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, funcția obținută prin prelungirea prin periodicitate, cu perioada $T=2\pi$, a funcției f. Deoarece funcția este pară, coeficienții b_n sunt nuli. Vom calcula coeficienții a_n. Avem:

$$\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^3}{3},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos nx \mathrm{d}x = x^2 \left.\frac{\sin nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n}\int_{-\infty}^{\infty} x \sin nx \mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{2}{n}\left(-x \left.\frac{\cos nx}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \mathrm{d}x \right) = \frac{4\pi(-1)^n}{n^2},\ n \geq 1.$$

În consecință $a_0 = \dfrac{2\pi^2}{3}$, $a_n = 4 \cdot \dfrac{(-1)^n}{n^2}$, $b_n = 0$, $n \geq 1$, deci

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \cos nx,\ \forall x \in [-\pi, \pi].$$

În particular, pentru $x = \pi$ obținem o identitate cunoscută, datorată lui *Euler*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Teorema 4.1.2. (Fejér). *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, periodică de perioadă 2π,*

$$s_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),\ n \in \mathbb{N}$$

şi sumele Fejér de ordinul n,

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-1}}{n},\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Atunci şirul de funcții $(\sigma_n)_n$ converge uniform la f pe $\mathbb{R}$.

Teorema 4.1.3. (Weierstrass). *Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă, periodică de perioadă 2π. Atunci pentru orice $\varepsilon > 0$ există un polinom trigonometric T_ε astfel încât*

$$\|f - T_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

Demonstrație. Fie $m_\varepsilon \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\|\sigma_p - f\| < \varepsilon$, pentru orice $p \geq m_\varepsilon$. Putem alege $T_\varepsilon = \sigma_{m_\varepsilon}$, unde σ_{m_ε} este dat de Teorema lui Fejér. ■

Teorema 4.1.4. (Weierstrass). *Dacă funcția* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *este continuă, atunci pentru orice* $\varepsilon>0$ *există un polinom algebric* P_ε *astfel încât* $\|f-P_\varepsilon\|<\varepsilon$.

Demonstrație. Pentru început, fie $f:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă care satisface $f(0)=f(2\pi)$ şi f^* prelungirea prin periodicitate pe $\mathbb{R}$ a funcției f. Conform Teoremei 4.1.3, pentru orice $\varepsilon>0$ există un polinom trigonometric T_ε astfel încât $\|f-T_\varepsilon\|<\dfrac{\varepsilon}{2}$, cu

$$T_\varepsilon=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{p}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx).$$

Dezvoltând în serie funcțiile $\cos$ şi $\sin$, rezultă că există un rang m_ε astfel încât

$$\left\|T_\varepsilon-\sum_{k=1}^{m_\varepsilon}a_kx^k\right\|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Notând $P_\varepsilon(x)=\sum_{k=1}^{m_\varepsilon}a_kx^k$, rezultă că

$$\|f-P_\varepsilon\|<\varepsilon.$$

Să presupunem acum că funcția f nu mai satisface condiția $f(0)=f(2\pi)$, deci $f(0)\neq f(2\pi)$. Considerăm funcția continuă

$$g:[0,2\pi]\to\mathbb{R},\qquad g(x)=f(x)+\frac{f(0)-f(2\pi)}{2\pi}x.$$

Atunci $g(0)=f(0)$, $g(2\pi)=f(0)$, deci $g(0)=g(2\pi)$. Conform celor de mai sus, pentru orice $\varepsilon>0$ există un polinom P_ε astfel încât $\|g-P_\varepsilon\|<\varepsilon$, adică

$$\left|f(x)+\frac{f(0)-f(2\pi)}{2\pi}x-P_\varepsilon(x)\right|<\varepsilon,\ \forall x\in[0,2\pi].$$

Notând $Q_\varepsilon(x)=P_\varepsilon(x)-\dfrac{f(0)-f(2\pi)}{2\pi}x$, rezultă că

$$\|f-Q_\varepsilon\|<\varepsilon.$$

În sfârşit, fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție continuă şi

$$h:[0,2\pi]\to[a,b],\qquad h(t)=a+\frac{b-a}{2\pi}t.$$

Evident, h este un homeomorfism. Considerăm funcția $g:[0,2\pi]\to\mathbb{R}$, $g(t)=f(h(t))$, $\forall t\in[0,2\pi]$. Ținând seama de cele de mai sus, rezultă că pentru orice $\varepsilon>0$ există un polinom P_ε astfel încât $\|g-P_\varepsilon\|<\varepsilon$, adică

$$|f(h(t))-P_\varepsilon(t)|<\varepsilon,\ \forall t\in[0,2\pi].$$

În consecință,

$$\left|f(x)-P_\varepsilon(h^{-1}(x))\right|<\varepsilon,\ \forall x\in[a,b].$$

Notând $Q_\varepsilon=P_\varepsilon\circ h^{-1}$, rezultă că

$$\|f-Q_\varepsilon\|<\varepsilon.\ \blacksquare$$

4.2. Serii Fourier generalizate

Fie $(H,<\cdot,\cdot>)$ un spațiu prehilbertian real şi fie $\{e_1,e_2,...,e_n,...\}$ un sistem ortonormal de elemente din H. Aşadar avem:

$$<e_i,e_j>=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{dacă } i=j\\ 0, & \text{dacă } i\neq j\end{cases}.$$

Fie $x\in H$ oarecare. *Coeficienții Fourier (generalizați) ai lui x în raport cu sistemul ortonormal* $\{e_1,e_2,...,e_n,...\}$ se definesc astfel:

$$\xi_n=<x,e_n>,\ n\in\mathbb{N}^*, \tag{1}$$

iar seria

$$\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n e_n, \tag{2}$$

se numeşte *seria Fourier ataşată lui x în raport cu sistemul ortonormal* $\{e_1,e_2,...,e_n,...\}$.

Teorema 4.2.1. $\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right\|\le\left\|x-\sum_{i=1}^{n}c_i e_i\right\|$, $\forall c_i\in\mathbb{R}$, $1\le i\le n$.

Demonstrație. Într-adevăr:

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}c_i e_i\right\|^2=<x-\sum_{i=1}^{n}c_i e_i,x-\sum_{j=1}^{n}c_j e_j>=$$

$$= \|x\|^2 - 2\sum_{i=1}^{n} c_i\xi_i + \sum_{i=1}^{n} c_i^2 = \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (c_i - \xi_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 .$$

Aşadar, avem

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (c_i - \xi_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 . \tag{3}$$

Evident această expresie este minimă dacă $c_i = \xi_i$, $1 \le i \le n$. Rezultă că

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\| \le \left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|, \ \forall c_i \in \mathbb{R},\ 1 \le i \le n . \ \blacksquare$$

Corolarul 4.2.1. *Dacă* ξ_n , $n \in \mathbb{N}^*$*, sunt coeficienții Fourier ai lui* x *în raport cu sistemul ortonormal* $\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$ *, atunci are loc inegalitatea lui Bessel*:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 \le \|x\|^2 . \tag{4}$$

Demonstrație. Din (3) rezultă că

$$0 \le \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i \right\|^2 \le \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 ,$$

deci

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \|x\|^2 .$$

Făcând $n \to \infty$, se obține (4). $\blacksquare$

Definiția 4.2.1. Sistemul ortonormal $\{e_n\}_{n\ge1}$ se numeşte *închis* dacă $Sp(\{e_n\}_{n\ge1})$ este dens în H, deci dacă pentru orice $x \in H$ şi orice $\varepsilon > 0$ există $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ astfel încât

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\| < \varepsilon .$$

Teorema 4.2.2. *Dacă sistemul ortonormal* $\{e_n\}_{n\ge1}$ *este închis atunci are loc identitatea lui Parseval:*

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 . \tag{5}$$

Demonstrație. Este suficient să arătăm că

$$\|x\|^2 \le \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2 . \tag{6}$$

Fie $\varepsilon > 0$. Atunci există $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$, astfel încât

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\| < \varepsilon .$$

Din (3) obținem

$$\varepsilon^2 > \left\| x - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{i=1}^{n} (c_i - \xi_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \ge \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 .$$

Aşadar

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + \varepsilon^2 > \|x\|^2 .$$

Cum ε este arbitrar, făcând $n \to \infty$, rezultă (6). ■

Definiția 4.2.2. Un sistem ortonormal $\{e_n\}_{n\ge 1}$ se numeşte *complet (total)* dacă orice $x \in H$ care satisface $\xi_i =< x, e_i >= 0$, pentru orice $i \in \mathbb{N}^*$, coincide cu elementul nul din H, deci $x = 0_H$.

Teorema 4.2.3. *Orice sistem ortonormal închis este complet.*

Demonstrație. Deoarece $\xi_i = 0$, $\forall i \in \mathbb{N}^*$, din egalitatea lui Parseval rezultă că $x = 0_H$.
■

Afirmația reciprocă nu este adevărată în general. Se poate arăta că într-un spațiu Hilbert cele două noțiuni coincid.

Fie $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Vom nota cu $\widetilde{C}([a,b])$ spațiul vectorial al funcțiilor continue pe porțiuni pe $[a,b]$ care satisfac

$$f(x) = \frac{1}{2} \cdot [f(x-0) + f(x+0)],\ \forall x \in [a,b].$$

Evident $C([a,b]) \subset \widetilde{C}([a,b])$. Pe $\widetilde{C}([a,b])$ definim următorul produs scalar

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\,,\ \forall f, g \in \widetilde{C}([a,b])\,.$$

Într-adevăr, se verifică uşor că dacă $f, g, f_1, f_2 \in \widetilde{C}([a,b])$, atunci:

$$< f_1 + f_2, g >=< f_1, g > + < f_2, g >,$$

$$< \alpha f, g >= \alpha < f, g >,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},$$

$$< f, g >=< g, f >,$$

$$< f, f >\geq 0\,.$$

Vom arăta acum că din $< f, f >= 0$, rezultă că $f \equiv 0$. Să presupunem că

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x = 0\,.$$

Fie $\Delta : a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b$ o diviziune a intervalului $[a,b]$, astfel încât funcția f este continuă pe intervalul (x_{i-1}, x_i). Considerăm funcțiile

$$g_i : [x_{i-1}, x_i] \to \mathbb{R}\,,\ 1 \leq i \leq n\,,$$

$$g_i(x) = \begin{cases} f(x_{i-1}+0), & \text{dacă } x = x_{i-1}, \\ f(x), & \text{dacă } x \in (x_{i-1}, x_i), \\ f(x_i - 0), & \text{dacă } x = x_i. \end{cases}$$

Funcția g_i este continuă pe $[x_{i-1}, x_i]$ şi $0 = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f^2(x)\mathrm{d}x = \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i^2(x)\mathrm{d}x$. În consecință $g_i(x) = 0$, $\forall x \in [x_{i-1}, x_i]$, deci $f(x) = 0$, $\forall x \in (x_{i-1}, x_i)$, $f(x_{i-1}+0) = 0$, $f(x_i - 0) = 0$.

Atunci pentru orice $i, 1 \leq i \leq n-1$,

$$f(x_i) = \frac{1}{2}\cdot[f(x_i - 0) + f(x_i + 0)] = 0\,.$$

Prin urmare $f(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$.

În concluzie, $\widetilde{C}([a,b])$ este un spațiu prehilbertian.

Fie acum spațiul prehilbertian $H = \widetilde{C}([-\pi,\pi])$ Să considerăm în acest spațiu şirul de funcții trigonometrice

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ..., \cos nx, \sin nx, ... \tag{7}$$

Se deduc cu uşurinţă următoarele formule importante:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \cdot \mathrm{d}x = 2\pi\,, \tag{8}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \,\mathrm{d}x = 0\,,\ m \in \mathbb{N}^*, \tag{9}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \,\mathrm{d}x = 0\,,\ m \in \mathbb{N}^*, \tag{10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{dacă } m \neq n \\ \pi, & \text{dacă } m = n \end{cases},\ m,n \in \mathbb{N}^*, \tag{11}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx \,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{dacă } m \neq n \\ \pi, & \text{dacă } m = n \end{cases},\ m,n \in \mathbb{N}^*, \tag{12}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx \,\mathrm{d}x = 0\,,\ m,n \in \mathbb{N}^*. \tag{13}$$

Să dovedim, de exemplu, (11). Dacă $m \neq n$, atunci din egalitatea

$$\cos mx \cdot \cos nx = \frac{1}{2} \cdot [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

rezultă că

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{m+n} \cdot \sin(m+n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{m-n} \cdot \sin(m-n)x \Big|_{-\pi}^{\pi} \right] = 0\,.$$

De asemenea

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos 2mx)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot (x + \frac{1}{2m} \cdot \sin 2mx)\Big|_{-\pi}^{\pi} = \pi\,.$$

Din egalităţile (8)-(13), rezultă că şirul (7) este un sistem ortogonal. Pe de altă parte, cum $\|f\| = \sqrt{< f, f >}$, din aceste egalităţi rezultă că

$$\|1\| = \sqrt{2\pi}\,,\ \|\cos nx\| = \|\sin nx\| = \sqrt{\pi}\,,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

În consecinţă, sistemul de funcţii

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \ldots. \tag{14}$$

este un sistem ortonormal de funcţii.

Fie a_n, b_n, coeficienții Fourier din Teorema lui Dirichlet. Notăm cu

$$c_0, c_1, d_1, c_2, d_2, ..., c_n, d_n, ...,$$

coeficienții Fourier generalizați în raport cu sistemul ortonormal (14). Atunci:

$$c_0 = < f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot a_0,$$

$$c_n = < f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx > = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \cdot a_n, \ n \in \mathbb{N}^*,$$

$$d_n = < f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx > = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x = \sqrt{\pi} \cdot b_n, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Inegalitatea lui Bessel devine

$$\frac{\pi}{2} a_0^2 + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \le \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x$$

sau

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \le \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x. \tag{15}$$

Se poate arăta că sistemul trigonometric (14) este închis. Rezultă că are loc egalitatea lui Parseval, adică

$$\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x. \tag{16}$$

Exemplul 4.2.1. În cazul funcției $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{\pi}{2sh\pi} \cdot e^x$, coeficienții Fourier sunt

$$a_0 = 1, \ a_n = \frac{(-1)^n}{1+n^2}, \ b_n = (-1)^{n+1} \cdot \frac{n}{1+n^2}, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Pe de altă parte

$$\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x = \frac{\pi^2 \cdot ch\pi}{2sh\pi}.$$

Din egalitatea lui Parseval obținem

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi \, ch\pi}{2sh\pi},$$

de unde rezultă că

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}=\frac{\pi\, ch\pi - sh\pi}{2sh\pi}.$$

4.3. Serii Fourier pentru funcţii periodice de perioadă $T = 2l$

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcţie periodică de perioadă $2l$, continuă pe porţiuni, $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(t)=\frac{l}{\pi}\,t$ şi $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g=f\circ h$. Funcţia g este periodică de perioadă 2π.

Într-adevăr

$$g(t+2\pi)=f\big(h(t+2\pi)\big)=f\left(\frac{l}{\pi}t+2l\right)=f(\frac{l}{\pi}t)=g(t),\ \forall t\in\mathbb{R}.$$

Dacă f este continuu diferenţiabilă pe porţiuni pe orice interval compact din $\mathbb{R}$, atunci şi g are această proprietate. Dacă, în plus, f este continuă, din Teorema lui Dirichlet rezultă că

$$g(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),\ \forall t\in\mathbb{R},$$

unde

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\cos nt\,\mathrm{d}t,\ n\in\mathbb{N},\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}g(t)\sin nt\,\mathrm{d}t,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Cum $t=\frac{\pi}{l}x$, obţinem

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x),\ \forall x\in\mathbb{R},$$

unde

$$a_n=\frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N},\quad b_n=\frac{1}{l}\cdot\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x,\ n\in\mathbb{N}^*.$$

Exemplul 4.3.1. Să se dezvolte în serie Fourier pe intervalul $(-l,l)$ funcţia $f(x)=x$.

Funcţia fiind impară, rezultă că $a_n=0$, $n\in\mathbb{N}$. Prin calcul, obţinem

$$b_n = \frac{2l}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Atunci

$$x = \frac{2l}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin\frac{n\pi}{l}x\,,\ x \in (-l, l).$$

4.4. *Forma complexă a seriilor Fourier*

Fie dezvoltarea în serie Fourier a funcţiei f :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n \sin\frac{n\pi}{l}x),\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Fie $\omega = \frac{\pi}{l}$. Din formulele lui Euler

$$\cos n\omega x = \frac{e^{\mathrm{i}n\omega x} + e^{-\mathrm{i}n\omega x}}{2}, \quad \sin n\omega x = \frac{e^{\mathrm{i}n\omega x} - e^{-\mathrm{i}n\omega x}}{2\mathrm{i}},$$

rezultă

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \frac{e^{\mathrm{i}n\omega x} + e^{-\mathrm{i}n\omega x}}{2} + b_n \cdot \frac{-\mathrm{i}e^{\mathrm{i}n\omega x} + \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}n\omega x}}{2}\right) =$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2} \cdot e^{-\mathrm{i}n\omega x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2} \cdot e^{\mathrm{i}n\omega x}.$$

Dacă notăm $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}$, $c_n = \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2}$, obţinem

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-\mathrm{i}n\omega x}.$$

Ţinând seama de expresia coeficienţilor Fourier a_n, b_n, rezultă că

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)(\cos n\omega x + \mathrm{i}\sin n\omega x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{\mathrm{i}n\omega x}\mathrm{d}x.$$

Aşadar

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)\, e^{\mathrm{i}n\omega x}\mathrm{d}x.$$

4.5. Formula integrală a lui Fourier. Transformata Fourier

Definiția 4.4.1. O funcție $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ se numeşte *absolut integrabilă* dacă $\int\limits_{-\infty}^{\infty}|f(x)|dx$ este convergentă.

Notăm cu $L^1(\mathbb{R})$ spațiul vectorial al funcțiilor absolut integrabile pe $\mathbb{R}$.

Funcțiile periodice care îndeplinesc condițiile Dirichlet şi satisfac în plus condiția

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)],\ \forall x\in\mathbb{R},$$

se dezvoltă în serie Fourier, adică

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{-\mathrm{i}n\omega x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)e^{\mathrm{i}n\omega t}\mathrm{d}t\right)e^{-\mathrm{i}n\omega x}.$$

Funcțiile f care nu sunt periodice dar satisfac anumite condiții se pot reprezenta ca o integrală dublă.

Teorema 4.5.1. (Formula integrală a lui Fourier)

Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ *cu proprietățile:*

(i) $f\in L^1(\mathbb{R})$;

(ii) f *este continuu diferențiabilă pe porțiuni pe orice interval compact* $[a,b]\subset\mathbb{R}$;

(iii) $f(x)=\frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)],\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Atunci

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}u\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{\mathrm{i}u(x-t)}\mathrm{d}t.$$

Definiția 4.5.1. Fie $f\in L^1(\mathbb{R})$, continuu diferențiabilă pe porțiuni pe orice interval compact din $\mathbb{R}$. Se numeşte *transformata Fourier* a funcției f, funcția $F:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ definită astfel:

$$F(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\mathrm{i}ux}\mathrm{d}x\,.$$

Folosim şi notaţia $\mathscr{F}(f)=F$.

Exemplul 4.5.1. Să se afle transformata Fourier a funcţiei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-ax^2}$, $a>0$.

Transformata Fourier a funcţiei date va fi:

$$F(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}e^{-\mathrm{i}ux}\mathrm{d}x\,.$$

Pentru calculul integralei derivăm în raport cu parametrul u . Avem:

$$F'(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (-\mathrm{i}x)e^{-ax^2}e^{-\mathrm{i}ux}\mathrm{d}x\,.$$

Integrând prin părţi, obţinem

$$F'(u)=\frac{\mathrm{i}}{2a\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (e^{-ax^2})'e^{-\mathrm{i}ux}\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{\mathrm{i}}{2a\sqrt{2\pi}}\left(e^{-\mathrm{i}ux}\cdot e^{-ax^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} ue^{-\mathrm{i}ux}\cdot e^{-ax^2}\mathrm{d}x\right),$$

deci

$$F'(u)=\frac{-u}{2a\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\cdot e^{-\mathrm{i}ux}\mathrm{d}x=-\frac{u}{2a}\cdot F(u)\,.$$

Atunci

$$F(u)=C\cdot e^{-\int\frac{u}{2a}\mathrm{d}u}=C\cdot e^{-\frac{u^2}{4a}}\,.$$

Dar $C=F(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}\mathrm{d}x$.

Notând $t=\sqrt{a}\pi$, obţinem

$$F(0) = \frac{1}{\sqrt{2a\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t .$$

Dar $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$, deci $F(0) = \frac{1}{\sqrt{2a}}$.

În final, rezultă

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2a}} \cdot e^{-\frac{u^2}{4a}} .$$

Dacă $a = \frac{1}{2}$, obținem

$$F(u) = e^{-\frac{u^2}{2}} .$$

Dacă f satisface condițiile Teoremei 4.5.1, atunci

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{\mathrm{i}u(x-t)} \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}ut} f(t) \mathrm{d}t \right) e^{\mathrm{i}ux} \mathrm{d}u$$

sau

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}ux} F(u) \mathrm{d}u .$$

Aceasta este formula *transformatei Fourier inversă*.

Exemplul 4.5.2. Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-a|x|}$, $a > 0$. Transformata Fourier a acestei funcții va fi

$$F(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2 + u^2} ,$$

iar transformata Fourier inversă va fi

$$e^{-a|x|} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}ux} \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{a}{a^2 + u^2} \mathrm{d}u = \frac{2a}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos ux}{a^2 + u^2} \mathrm{d}u .$$

Obținem astfel următoarea identitate:

$$e^{-a|x|} = \frac{2a}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\cos ux}{a^2 + u^2} \mathrm{d}u , \ \forall x \in \mathbb{R} .$$

Fie f o funcție care satisface ipotezele Teoremei 4.5.1 şi care, în plus, este pară. Din formula integrală Fourier, rezultă:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}u(x-t)} f(t)\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}t \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos u(x-t)\mathrm{d}u + \mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin u(x-t)\mathrm{d}u \right).$$

Ținând seama că integrantul din ultima integrală este o funcție impară şi folosind în continuare acest argument, obținem

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\cos ux \cos ut + \sin ux \sin ut\right)\,\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}u \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos ux \cos ut\mathrm{d}t = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \cos ux\mathrm{d}u \int_{0}^{\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t\,.$$

Transformata Fourier prin cosinus se defineşte astfel

$$F_c(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} f(t)\cos ut\mathrm{d}t\,.$$

Dacă funcția f este impară, se poate defini *transformata Fourier prin sinus* astfel

$$F_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} f(t)\sin ut\mathrm{d}t\,.$$

Dacă funcția f este pară, avem

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} F_c(u)\cos ux\mathrm{d}u\,,$$

iar dacă funcția f este impară, avem

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_{0}^{\infty} F_s(u)\sin ux\mathrm{d}u\,.$$

Exemplul 4.5.3. Să se determine transformata Fourier prin cosinus a funcției

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\,,\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{dacă } x \neq 0 \\ 1, & \text{dacă } x = 0 \end{cases}.$$

Prin calcul direct, obținem

$$F_c(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}\cdot\cos ut\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^\infty\left[\frac{\sin(1+u)t}{t}+\frac{\sin(1-u)t}{t}\right]\mathrm{d}t=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot[1+\operatorname{sgn}(1-|u|)]\cdot\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\,.$$

În mod asemănător

$$F_c(\pm 1)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^\infty\frac{\sin 2t}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_0^\infty\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}y\,.$$

Dar $\int_0^\infty\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$, deci

$$F_c(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot[1+\operatorname{sgn}(1-|u|)]=\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \text{dacă } |u|<1\\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}, & \text{dacă } |u|=1\,.\\ 0, & \text{dacă } |u|>1\end{cases}$$

Dacă $f:[0,\infty)\to\mathbb{C}$, atunci f se poate prelungi la o funcție pară (impară) pe $\mathbb{R}$. În acest caz, se poate vorbi atât de transformata Fourier prin cosinus cât şi de transformata Fourier prin sinus ale funcției f.

Exemplul 4.5.4. Să se determine transformatele Fourier prin cosinus şi sinus ale funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^{-x}$, $x\ge 0$.

Funcția $\bar{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\bar{f}(x)=e^{-|x|}$, este prelungirea prin paritate a funcției f, iar funcția $\tilde{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\tilde{f}(x)=e^{-|x|}\operatorname{sgn}x$, este prelungirea prin imparitate a funcției f. Atunci:

$$F_c(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\int_0^\infty e^{-t}\cos ut\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{1}{1+u^2},$$

$$F_s(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^\infty e^{-t} \sin ut \mathrm{d}t = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{u}{1+u^2}.$$

Transformata Fourier inversă conduce la egalitățile:

$$\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{\cos ux}{1+u^2} \mathrm{d}u = e^{-x}\ ,\ x \in [0, \infty),$$

$$\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^\infty \frac{u \sin ux}{1+u^2} \mathrm{d}u = e^{-x}\ ,\ x \in [0, \infty).$$

4.6. *Proprietățile transformatei Fourier*

Fie $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, două funcții continuu diferențiabile pe porțiuni pe orice interval compact din $\mathbb{R}$. Transformata Fourier are următoarele proprietăți:

1) *Liniaritatea*

$$\mathscr{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathscr{F}(f) + \beta \mathscr{F}(g),\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

2) *Mărginirea*

$$|F(u)| \le \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^\infty |f(t)| \mathrm{d}t < \infty.$$

3) Fie $h > 0$ și $f_h(x) = f(x-h)$. Atunci

$$\mathscr{F}(f_h)(u) = e^{-iuh} \cdot \mathscr{F}(f)(u).$$

Într-adevăr,

$$\left[\mathscr{F}(f_h)\right](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^\infty e^{-\mathrm{i}ut} f_h(t) \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^\infty e^{-\mathrm{i}ut} f(t-h) \mathrm{d}t.$$

Dacă notăm $t - h = x$, rezultă

$$\left[\mathscr{F}(f_h)\right](u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^\infty e^{-\mathrm{i}uh} e^{-\mathrm{i}ux} f(x) \mathrm{d}x = e^{-\mathrm{i}uh} \cdot F(u).$$

4) Fie $g_h(x) = e^{ihx} \cdot f(x)$. Atunci

$$\mathscr{F}(g_h)(u) = F(u-h),$$

unde F este transformata Fourier a funcției f.

5) Dacă $\lim\limits_{|x|\to\infty} f(x) = 0$, atunci

$$\mathscr{F}\left(f^{(k)}\right)(u) = (\mathrm{i}u)^k F(u).$$

Într-adevăr, cum $F(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-\mathrm{i}ut} \mathrm{d}t$, obținem

$$G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}ut} \cdot f'(t) \mathrm{d}t.$$

Integrând prin părți, rezultă

$$G(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \left(e^{-\mathrm{i}ut} f(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} + \mathrm{i}u \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}ut} f(t) \mathrm{d}t \right) = \mathrm{i}uF(u).$$

Aşadar

$$\mathscr{F}\left(f'\right)(u) = G(u) = \mathrm{i}uF(u).$$

6) *Convoluția* a două funcții se defineşte astfel:

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) \mathrm{d}x, \ t \in \mathbb{R}.$$

Atunci

$$\mathscr{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \cdot \mathscr{F}(f) \cdot \mathscr{F}(g).$$

Într-adevăr, notând cu $F_1 = \mathscr{F}(f)$ şi cu $F_2 = \mathscr{F}(g)$, avem:

$$F_1(u) \cdot F_2(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}ux} f(x) \ \mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}uy} g(y) \ \mathrm{d}y.$$

Fie $t = x + y$. Atunci

$$F_1(u) \cdot F_2(u) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}ut} f(x) g(t-x) \ \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}ut} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathscr{F}(f * g)(u) .$$

Prin urmare

$$\mathscr{F}(f * g)(u) = F_1(u) \cdot F_2(u) \cdot \sqrt{2\pi} .$$

CAPITOLUL 5

ECUAȚII CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDINUL AL DOILEA

5.1. Clasificarea ecuațiilor cu derivate parțiale cvasiliniare de ordinul al doilea

Formularea matematică a unor probleme fizice conduce la ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea. Multe astfel de ecuații întâlnite în fizică şi tehnică sunt ecuații liniare în raport cu funcția necunoscută şi derivatele parțiale ale acesteia sau pot fi aduse la această formă în urma unor aproximații convenabile. În acest capitol ne vom ocupa de ecuații cu derivate parțiale de ordinul al doilea pentru funcții de două variabile.

Definiția 5.1.1. Fie $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă. Se numeşte *ecuație cvasiliniară de ordinul al doilea* o ecuație cu derivate parțiale de forma

$$A(x,y)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C(x,y)\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\left(x,y,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0\,, \qquad (1)$$

unde $(x,y)\in\Omega$, $A^2+B^2+C^2\neq 0$ pe Ω, A,B,C sunt funcții continue pe Ω, iar funcția D este continuă pe Ω. *Necunoscuta* este funcția $u\in\mathscr{C}^{(2)}(\Omega)$.

Vom începe cu clasificarea acestor ecuații. În acest scop vom determina formulele de transformare a coeficienților ecuației (1) la o schimbare a variabilelor independente x, y.

Fie $\Omega,\Omega_1\subset\mathbb{R}^2$ mulțimi deschise şi fie $F:\Omega\to\Omega_1$, definită astfel:

$$F(x,y)=\big(\xi(x,y),\eta(x,y)\big),\ \forall(x,y)\in\Omega\,,$$

cu proprietățile:

a) F este bijectivă;

b) $F \in \mathscr{C}^{(1)}(\Omega)$;

c) $\det J_F(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}(x,y) \neq 0$, $\forall (x,y) \in \Omega$.

Fie acum funcția $v = u \circ F^{-1} : \Omega_1 \to \mathbb{R}$. Atunci $u = v \circ F$, deci

$$u(x,y) = v\big(\xi(x,y), \eta(x,y)\big). \tag{2}$$

Cu această schimbare de variabile, ecuația (1) se va transforma într-o nouă ecuație cu derivate parțiale pentru funcția v. Reamintim formulele de derivare a funcțiilor compuse învățate la cursul de Analiză matematică:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial v}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}.$$

Înlocuind în (1), obținem

$$A^*(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2B^*(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + C^*(\xi,\eta)\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + D^*(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial \xi},\frac{\partial v}{\partial \eta}) = 0, \tag{3}$$

unde

$$A^* = A\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y} + C\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2, \tag{4}$$

$$B^* = A\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x} + B\cdot\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C\cdot\frac{\partial \xi}{\partial y}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y}, \tag{5}$$

$$C^* = A\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial y} + C\cdot\left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2. \tag{6}$$

Se constată că

$$(B^*)^2 - A^* \cdot C^* = (B^2 - AC) \cdot \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \xi}{\partial x} & \dfrac{\partial \xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial x} & \dfrac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix}^2 .$$

Aşadar, în urma schimbării de variabile, expresiile $B^2 - A \cdot C$ şi $(B^*)^2 - A^* \cdot C^*$ păstrează acelaşi semn sau sunt în acelaşi timp nule. În consecință, ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul al doilea cvasiliniare se clasifică în modul următor.

Definiția 5.1.2. Dacă $B^2 - A \cdot C > 0$, ecuația se numeşte de *tip hiperbolic*, dacă $B^2 - A \cdot C = 0$, ecuația se numeşte de *tip parabolic*, iar dacă $B^2 - A \cdot C < 0$, ecuația se numeşte de *tip eliptic*.

Menționăm că terminologia aceasta este pur convențională.

Subliniem că această clasificare depinde de punctul (x, y), deoarece semnul expresiei $B^2 - A \cdot C$ depinde de punctul $(x, y) \in \Omega$. Prin urmare, ecuația (1) poate să nu aibă acelaşi tip pe întreg domeniul Ω.

Exemplul 5.1.1. *Ecuația lui Tricomi*

$$y \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

este de tip mixt. Dacă $y < 0$ ecuația este de tip hiperbolic, dacă $y > 0$ este de tip eliptic, iar dacă $y = 0$ ecuația este de tip parabolic. Această ecuație apare în aerodinamică. Domeniul hiperbolic $(y < 0)$ corespunde mişcării subsonice, iar domeniul eliptic $(y > 0)$ descrie mişcarea supersonică.

Definiția 5.1.3. Se numeşte *curbă caracteristică a ecuației* (1), orice curbă plană de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$, nesingulară, $\Gamma \subset \Omega$, de ecuație $\varphi(x, y) = 0$, care satisface ecuația

$$A \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2B \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = 0. \tag{7}$$

Fie $M_0(x_0, y_0)$ un punct fixat al curbei caracteristice Γ. Curba fiind nesingulară, putem presupune că $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$. Conform teoremei funcțiilor implicite, în vecinătatea punctului M_0, curba are ecuația $y = y(x)$. Din relația $\varphi(x, y(x)) = 0$, rezultă că

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot y'(x) = 0, \tag{8}$$

deci

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot y'(x).$$

Înlocuind în (7), obținem

$$A \cdot y'^2(x) - 2B \cdot y'(x) + C = 0. \tag{9}$$

Aceasta este *ecuația diferențială a curbelor caracteristice* ale ecuației (1).

Observația 5.1.1. Coeficienții A, B, C ai ecuației (1) nu sunt simultan nuli. Putem presupune că $A \neq 0$. Într-adevăr, dacă $A = 0$ şi $C \neq 0$, schimbând x cu y obținem o ecuație în care $A \neq 0$. Dacă $A = C = 0$, atunci $B \neq 0$, schimbarea de variabile $x' = x + y$, $y' = x - y$ conducându-ne la o ecuație cu $A \neq 0$. De fapt, în acest ultim caz, după cum se va vedea ulterior, ecuația (1) are deja forma canonică, deci nu mai este necesară nici o schimbare de variabile.

Aşadar, ecuația (9) este o ecuație de gradul al doilea în $y'(x)$. Fie

$$y'(x) = \lambda(x, y) \tag{10}$$

o soluție a ecuației (9) şi $\varphi(x, y) = C$ soluția generală a ecuației diferențiale (10). În ipoteza că $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$, avem

$$y'(x) = -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial y}} = \lambda(x, y).$$

Ținând seama că λ verifică ecuația (9), deducem că

$$A \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = 0,$$

deci $\varphi(x, y) = C$ este o curbă caracteristică a ecuației (1).

5.1.1. Ecuații de tip hiperbolic

În acest caz, din ecuația (8) rezultă

$$y' = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{11}$$

şi

$$y' = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}. \tag{12}$$

Fie curbele caracteristice $\varphi_1(x, y) = C_1$ şi $\varphi_2(x, y) = C_2$, soluții ale ecuațiilor diferențiale (11) respectiv (12). Cu schimbarea de variabilă

$$\begin{cases} \xi = \varphi_1(x, y) \\ \eta = \varphi_2(x, y) \end{cases},$$

rezultă că $A^* = C^* = 0$, deci ecuația (3) devine

$$2B^*(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi \, \partial \eta} + D^*(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}) = 0,$$

care se mai scrie sub forma

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \, \partial \eta} + D^{**}(\xi, \eta, v, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \eta}) = 0. \tag{13}$$

Aceasta este *forma canonică* a ecuațiilor cu derivate parțiale de tip hiperbolic.

Exemplul 5.1.1.1. Să se reducă la forma canonică următoarea ecuație cu derivate parțiale

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

În acest caz $A(x, y) = x^2$, $B(x, y) = 0$, $C(x, y) = -y^2$. Avem $B^2 - A \cdot C = x^2 y^2 > 0$, deci ecuația este de tip hiperbolic în orice domeniu care nu intersectează axele de coordonate.

Conform (9), ecuația diferențială a curbelor caracteristice este

$$x^2 y'^2(x) - y^2 = 0.$$

Rezolvând această ecuație, obținem $y' = \frac{y}{x}$ şi $y' = -\frac{y}{x}$, care prin integrare dau $xy = C_1$, $\frac{y}{x} = C_2$. Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = \dfrac{y}{x} \end{cases}.$$

Obținem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + (-\frac{y}{x^2}) \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{x} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2\frac{y^2}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{y^2}{x^4} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{2y}{x^3} \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

În consecință, forma canonică a ecuației este

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0.$$

Exemplul 5.1.1.2. Să se afle soluția ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 3 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

care satisface condițiile $u(x,0) = 3x^2$, $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0$.

Mai întâi, determinăm forma canonică a ecuației cu derivate parțiale. Conform (9), ecuația diferențială a curbelor caracteristice este

$$y'^2(x) - 2y'(x) - 3 = 0,$$

de unde obținem $y' = 3$, $y' = -1$. Integrând, rezultă $3x - y = C_1$, $x + y = C_2$. Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = 3x - y \\ \eta = x + y \end{cases}.$$

Obținem

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial \xi}+\frac{\partial v}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=9\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+6\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=-3\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\,\partial \eta}+\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

Atunci, forma canonică a ecuației este

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta}=0,$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)=0.$$

Rezultă că $\frac{\partial v}{\partial \eta}=\psi_1(\eta)$. Prin integrare, obținem că $v(\xi,\eta)=\varphi(\xi)+\psi(\eta)$, deci soluția generală a ecuației cu derivate parțiale dată este

$$u(x,y)=\varphi(3x-y)+\psi(x+y).$$

Condiția $u(x,0)=3x^2$ conduce la egalitatea $\varphi(3x)+\psi(x)=3x^2$, iar condiția $\frac{\partial u}{\partial y}(x,0)=0$ conduce la egalitatea $-\varphi'(3x)+\psi'(x)=0$. Din această ultimă egalitate, obținem $-\frac{1}{3}\varphi(3x)+\psi(x)=C$. Cum $\varphi(3x)+\psi(x)=3x^2$, prin scădere rezultă că $\varphi(3x)=\frac{9}{4}x^2-\frac{3}{4}C$, deci $\varphi(x)=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}C$. Totodată $\psi(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{3}{4}C$. În consecință, soluția ecuației cu derivate parțiale, cu condițiile specificate, este

$$u(x,y)=\varphi(3x-y)+\psi(x+y)=3x^2+y^2.$$

5.1.2. Ecuații de tip parabolic

În acest caz $AC=B^2$. Ecuația (8) are o singură soluție

$$y'=\frac{B}{A}.$$

Obținem o singură familie de curbe caracteristice $\varphi(x, y) = C$, care va satisface ecuația

$$A \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{14}$$

Dacă $B \neq 0$ (altfel, ecuația (1) are deja forma canonică), înmulțim ecuația (14) cu C, ținem seama că $AC = B^2$ şi împărțim cu B. Obținem, astfel, ecuația echivalentă

$$B \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + C \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{15}$$

În continuare, facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x, y) \\ \eta = h(x, y) \end{cases}, \tag{16}$$

unde h este arbitrar astfel încât $\frac{D(\xi,\eta)}{D(x, y)} \neq 0$. Alegem funcția h cât mai simplă, de regulă $\eta = x$ sau $\eta = y$. Folosind (14) şi ținând seama că $AC = B^2$, rezultă că φ satisface (7), deci $A^* = 0$, conform (4). Pe de altă parte, din (14), (15) şi (16) deducem că

$$B^* = (A \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + B \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y}) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + (B \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + C \cdot \frac{\partial \xi}{\partial y}) \cdot \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 .$$

Aşadar, în cazul parabolic, ecuația (3) devine

$$C^*(\xi,\eta) \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + D^*(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial \xi},\frac{\partial v}{\partial \eta}) = 0$$

sau încă

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \bar{D}(\xi,\eta,v,\frac{\partial v}{\partial \xi},\frac{\partial v}{\partial \eta}) = 0. \tag{17}$$

Aceasta este *forma canonică* a ecuațiilor cu derivate parțiale de tip parabolic.

Exemplul 5.1.2.1. Să se reducă la forma canonică şi să se găsească soluția generală a ecuației cu derivate parțiale

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Cum $B^2 - A \cdot C = 0$, ecuația este de tip parabolic. Din ecuația caracteristicilor rezultă $y'(x) = -\frac{y}{x}$, care prin integrare conduce la $\ln xy = C$. În urma schimbării de variabile

$$\begin{cases} \xi = xy \\ \eta = y \end{cases},$$

obținem

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + 0 \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = x \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + 1 \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = y^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = xy \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + y \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial v}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = x^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2x \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

Forma canonică a ecuației este

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0.$$

Această ecuație se mai scrie sub forma

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\eta \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} \right) = 0,$$

de unde rezultă că

$$\eta \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} = \varphi(\xi)$$

sau

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{1}{\eta} \cdot \varphi(\xi).$$

Prin integrare obținem

$$v(\xi, \eta) = \varphi(\xi) \cdot \ln \eta + \psi(\xi).$$

Prin urmare, soluția generală a ecuației este

$$u(x, y) = \varphi(xy) \cdot \ln y + \psi(xy).$$

5.1.3. Ecuații de tip eliptic

Suntem în cazul $B^2 - A \cdot C < 0$. Din (9) obținem

$$y'_{1,2} = \frac{B}{A} \pm \mathrm{i} \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A}$$

şi mai departe, prin integrare:

$$\begin{cases} \varphi_1(x,y) + \mathrm{i}\varphi_2(x,y) = C_1 \\ \varphi_1(x,y) - \mathrm{i}\varphi_2(x,y) = C_2 \end{cases}.$$

Vom face schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \alpha = \varphi_1(x,y) + \mathrm{i}\varphi_2(x,y) \\ \beta = \varphi_1(x,y) - \mathrm{i}\varphi_2(x,y) \end{cases}.$$

Ca şi în cazul hiperbolic, calculul formal conduce la

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} + D^{**}(\alpha,\beta,v,\frac{\partial v}{\partial\alpha},\frac{\partial v}{\partial\beta}) = 0. \tag{18}$$

Considerăm o nouă schimbare de variabile

$$\begin{cases} \xi = \dfrac{1}{2}(\alpha+\beta) \\ \eta = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}(\alpha-\beta) \end{cases}.$$

Fie $G(\alpha,\beta) = \left(\xi(\alpha,\beta),\eta(\alpha,\beta)\right)$, $\forall(\alpha,\beta)\in\Omega_1$ şi $w = v\circ G^{-1}$. Atunci

$$v(\alpha,\beta) = w\left(\xi(\alpha,\beta),\eta(\alpha,\beta)\right),$$

deci

$$\frac{\partial v}{\partial\alpha} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial w}{\partial\xi} + \frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{\partial w}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial v}{\partial\beta} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial w}{\partial\xi} - \frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{\partial w}{\partial\eta}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha\,\partial\beta} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\right). \tag{19}$$

Înlocuind (19) în (18), deducem că forma canonică a ecuației (1) în cazul eliptic este

$$\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2} + \tilde{D}\left(\xi,\eta,w,\frac{\partial w}{\partial\xi},\frac{\partial w}{\partial\eta}\right) = 0. \tag{20}$$

Exemplul 5.1.3.1. Să se reducă la forma canonică următoarea ecuație cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 4\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} + 5\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\cdot\frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Observăm că $B^2 - A \cdot C = -1$, deci ecuația este de tip eliptic. Din ecuația caracteristicilor rezultă $y'(x) = 2 + \mathrm{i}$, care prin integrare conduce la $y(x) = (2+\mathrm{i})x + C$.

Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = 2x - y \\ \eta = x \end{cases}.$$

Atunci

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \eta}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial w}{\partial \xi},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 4\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + 4\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\,\partial \eta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial \xi\,\partial \eta}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2}.$$

Înlocuind în ecuația cu derivate parțială dată, rezultă că forma canonică a acestei ecuații este

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{\partial w}{\partial \eta} = 0.$$

5.2. Ecuația coardei vibrante

Ecuația coardei vibrante este o ecuație de tip hiperbolic, reprezentativă pentru această clasă de ecuații.

În teoria elasticității prin *coardă* se înțelege un fir flexibil tensionat. Vom considera vibrațiile (oscilațiile) mici transversale ale coardei în planul xOu, în jurul poziției de echilibru, care coincide cu axa Ox. În figura 1 este reprezentat graficul coardei la momentul t.

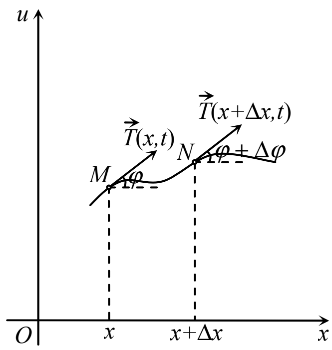


Fig. 1

Vom nota cu $u(x,t)$ abaterea relativă a unui punct al coardei față de poziția de echilibru în punctul x la momentul t. Datorită flexibilității, tensiunea $\vec{T}(x,t)$ în punctul x la momentul t are aceeaşi direcție cu tangenta la coardă în punctul x. Deoarece vibrațiile sunt mici, conform legii lui Hooke, putem presupune că mărimea tensiunii va rămâne constantă, independentă de t şi x, deci $\left\|\vec{T}(x,t)\right\| = T$. Să considerăm acum un element al coardei, corespunzător intervalului $[x, x+\Delta x]$. Fie $M = u(x,t)$, $N = u(x+\Delta x, t)$. De asemenea, fie $F(x,t)\cdot\Delta x$ proiecția pe axa Ox a forței externe care acționează la momentul t asupra intervalului $[x, x+\Delta x]$. Dacă $\rho(x)$ este densitatea liniară de masă, masa elementului MN al coardei este $\rho(x)\cdot\Delta x$. Vom presupune coarda omogenă, adică densitatea este constantă, deci $\rho(x) = \rho = const.$. Să notăm cu φ şi $\varphi + \Delta\varphi$ unghiurile făcute de tangentele la coardă în punctele M respectiv N, cu axa Ox. Deoarece vibrațiile sunt presupuse „mici", rezultă că φ este „mic", deci putem aproxima

$$\sin\varphi \simeq tg\varphi = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t). \tag{1}$$

Asupra intervalului $[x, x+\Delta x]$ acționează o forță datorită tensiunii şi forța externă.

Conform legii a doua a lui Newton, suma acestor forțe este egală cu produsul dintre masă şi accelerație. Proiecția acestei relații vectoriale pe axa Ou este

$$T\cdot\sin(\varphi+\Delta\varphi) - T\cdot\sin\varphi + F(x,t)\cdot\Delta x = \rho\cdot\Delta x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t). \tag{2}$$

Ținând seama de (1), rezultă că

$$\begin{aligned} &T\cdot\sin(\varphi+\Delta\varphi) - T\cdot\sin\varphi \simeq T\cdot\left(tg(\varphi+\Delta\varphi) - tg\varphi\right) = \\ &= T\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\right) \simeq T\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\cdot\Delta x. \end{aligned} \tag{3}$$

Înlocuind (3) în (2) şi simplificând cu Δx, deducem

$$\rho\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t). \tag{4}$$

Aceasta este *ecuația micilor vibrații transversale ale coardei*. Dacă $F = 0$, vibrațiile sunt *libere*, iar în cazul $F \neq 0$ vibrațiile sunt *forțate*.

Notând $a^2 = \dfrac{T}{\rho}$ şi $f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{\rho}$, ecuația (4) se mai poate scrie sub forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t). \tag{5}$$

Ecuația (5) se întâlneşte şi în probleme de propagarea undelor (acustice, optice, electromagnetice) când constanta a^2 are alte semnificații fizice. De aceea, ecuația (5) se mai numeşte şi *ecuația unidimensională a undelor*.

5.2.1. Ecuația coardei vibrante infinite libere

Prin *coardă infinită* se înțelege o coardă foarte lungă astfel încât vibrațiile la capete nu influențează sau influențează puțin comportarea punctelor dintr-o porțiune a coardei depărtată de extremități. În absența unor forțe exterioare coardei, funcția $(x,t) \mapsto u(x,t)$ verifică ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

cu condițiile inițiale

$$\begin{cases} u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x) \end{cases}, \ \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Condițiile inițiale (2) indică starea în care se află coarda la momentul inițial, precum şi viteza fiecărui punct al coardei la acelaşi moment. Vom presupune că funcția f este de clasă $\mathscr{C}^{(2)}$, iar funcția g este de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ pe $\mathbb{R}$.

Se pune problema determinării funcției $u : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$, care verifică ecuația (1) şi condițiile inițiale (2). O astfel de problemă se numeşte problemă *Cauchy* sau *problemă cu condiții inițiale*.

Vom aduce mai întâi ecuația (1) la forma canonică. Ecuația diferențială a curbelor caracteristice este

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 - a^2 = 0,$$

care conduce la ecuațiile diferențiale

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = a, \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -a.$$

Soluțiile generale ale acestor ecuații sunt, respectiv,

$$x - at = C_1, \qquad x + at = C_2.$$

Facem schimbarea de variabile

$$\begin{cases} \xi = x - at \\ \eta = x + at \end{cases}.$$

Obținem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \cdot \frac{\partial v}{\partial \xi} + a \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - 2a^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} + a^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2}.$$

Înlocuind în ecuația (1), rezultă forma canonică a acestei ecuații:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0,$$

care se mai scrie sub forma

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Integrând de două ori, obținem succesiv

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \psi(\eta),$$

$$v(\xi, \eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta),$$

unde Φ şi Ψ sunt funcții arbitrare de o variabilă, de clasă $\mathscr{C}^{(2)}$.

Soluția generală a ecuației (1) este

$$u(x,t) = \Phi(x - at) + \Psi(x + at). \tag{3}$$

Funcțiile $u_1(x,t) = \Phi(x - at)$ şi $u_2(x,t) = \Psi(x + at)$ reprezintă mişcări ale coardei, care pot fi descrise ca unde care se deplasează spre stânga şi respectiv spre dreapta cu viteza a.

Soluția generală a ecuației (1) este superpoziția acestor unde.

Ecuația (1) nu determină mişcarea coardei în mod univoc. Din acest motiv am adăugat condițiile inițiale. Aşadar, vom determina funcțiile Φ şi Ψ astfel încât funcția u să verifice condițiile inițiale (2). Deoarece

$$u(x,0)=\Phi(x)+\Psi(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=-a\cdot\Phi'(x)+a\cdot\Psi'(x),$$

din (2) rezultă că

$$\begin{cases}\Phi(x)+\Psi(x)=f(x)\\ -a\cdot\Phi'(x)+a\cdot\Psi'(x)=g(x)\end{cases}.$$

Dacă $x_0\in\mathbb{R}$ este un punct arbitrar fixat, din a doua egalitate rezultă:

$$\Phi(x)-\Psi(x)=-\frac{1}{a}\cdot\int_{x_0}^{x}g(z)\mathrm{d}z+C.$$

Se obține astfel sistemul:

$$\begin{cases}\Phi(x)+\Psi(x)=f(x)\\ \Phi(x)-\Psi(x)=-\dfrac{1}{a}\cdot\displaystyle\int_{x_0}^{x}g(z)\mathrm{d}z+C\end{cases},$$

a cărui soluție este

$$\Phi(x)=\frac{1}{2}\cdot f(x)-\frac{1}{2a}\cdot\int_{x_0}^{x}g(z)\mathrm{d}z+\frac{C}{2},$$

$$\Psi(x)=\frac{1}{2}\cdot f(x)+\frac{1}{2a}\cdot\int_{x_0}^{x}g(z)\mathrm{d}z-\frac{C}{2}.$$

Prin urmare

$$u(x,t)=\Phi(x-at)+\Psi(x+at)=\frac{1}{2}\cdot f(x-at)-\frac{1}{2a}\cdot\int_{x_0}^{x-at}g(z)\mathrm{d}z+$$

$$+\frac{1}{2}\cdot f(x+at)+\frac{1}{2a}\cdot\int_{x_0}^{x+at}g(z)\mathrm{d}z.$$

Aşadar, soluția ecuației (1) cu condițiile inițiale (2) este:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\cdot[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\cdot\int_{x-at}^{x+at}g(z)\mathrm{d}z. \tag{4}$$

Formula (4) care rezolvă problema (1)-(2) se numeşte *formula lui D´Alembert*, iar metoda folosită se numeşte *metoda schimbării variabilelor*.

Observația 5.2.1. Să considerăm cazul particular al coardei nelimitată în ambele sensuri, satisfăcând condițiile inițiale:

$$u(x,0) = f(x),\ \forall x \in \mathbb{R},$$

unde $f(x) \neq 0$, dacă $x \in [\alpha,\beta]$, $f(x) = 0$, dacă $x \notin [\alpha,\beta]$ (fig. 2) şi

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Presupunem că funcția f este derivabilă de două ori pe $\mathbb{R}$.

Procedând ca mai sus, soluția problemei este

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\cdot[f(x-at) + f(x+at)].$$

Această formulă se poate interpreta în modul următor.

La un moment t, graficele funcțiilor $f(x-at)$ şi $f(x+at)$ se obțin din graficul funcției f prin translații în direcția axei Ox, prima în sensul axei Ox, a doua în sens opus.

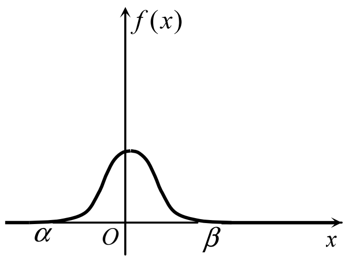


Fig. 2

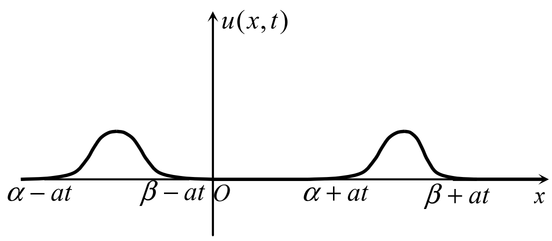


Fig. 3

Aşadar, $f(x-at) \neq 0$, dacă $\alpha + at \leq x \leq \beta + at$ şi $f(x+at) \neq 0$, dacă $\alpha - at \leq x \leq \beta - at$, deci graficul funcției $u(x,t)$ este cel din fig. 3.

Să presupunem că un observator este plasat la momentul $t = 0$ în punctul x_0 şi se deplasează pe axa Ox în sensul pozitiv cu viteza a, adică abscisa lui la momentul t va fi $x = x_0 + at$ sau $x - at = x_0$. Pentru acest observator contribuția termenului $f(x-at)$ în deplasarea u a coardei rămâne mereu aceeaşi şi anume egală cu $f(x_0)$; avem deci o propagare a deplasării, care se numeşte *propagarea undei directe*. În acelaşi mod se arată că termenul $f(x+at)$ corespunde unei propagări în sensul opus pe Ox, cu aceeaşi viteză a, care corespunde *undei inverse*.

Prin urmare, vibrațiile transversale ale coardei apar ca rezultante ale unor propagări de unde, una directă şi una inversă cu aceeaşi viteză a.

5.2.2. Coarda vibrantă liberă cu capete fixe

Problema matematică la care conduce studiul vibrațiilor libere ale unei coarde finite, de lungime l, cu capete fixe, se poate formula în modul următor.

Să se determine soluția ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

cu condițiile la limită

$$u(0,t) = u(l,t) = 0\,,\ \forall t \in [0,\infty) \tag{2}$$

şi condițiile inițiale

$$u(x,0) = f(x)\,,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)\,,\ \forall x \in [0,l]\,. \tag{3}$$

Conform condițiilor la limită (2), capetele coardei sunt fixe. Condițiile inițiale (3) indică starea în care se află coarda la momentul inițial de timp, precum şi viteza fiecărui punct al coardei la acelaşi moment. Funcțiile f şi g sunt date şi sunt presupuse nenule şi de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ pe $[0,l]$. Din (2) şi (3) rezultă că funcțiile f şi g trebuie să satisfacă egalitățile

$$f(0) = f(l) = 0\,,\ g(0) = g(l) = 0\,.$$

Pentru rezolvarea problemei enunțate vom folosi *metoda separării variabilelor a lui Fourier*. Această metodă este însoțită de *principiul suprapunerii efectelor*.

Pentru început căutăm soluții ale ecuației (1) de forma

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)\,. \tag{4}$$

Ținând seama de (2), rezultă:

$$\begin{cases} X(0) \cdot T(t) = 0 \\ X(l) \cdot T(t) = 0 \end{cases},$$

pentru orice $t > 0$. Atunci

$$X(0) = X(l) = 0\,, \tag{5}$$

deoarece în caz contrar ar rezulta $T(t) = 0$, pentru orice $t > 0$, deci $u(x,t) \equiv 0$, ceea ce contravine condițiilor inițiale.

Punând condiția ca funcția u dată de (4) să verifice ecuația (1), obținem

$$X(x) \cdot T''(t) = a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t)\,,\ \forall x \in [0,l]\,,\ \forall t \in [0,\infty)\,.$$

sau

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)}, \ \forall x \in [0,l], \ \forall t \in [0,\infty).$$

O funcție de t coincide cu o funcție de x numai dacă ambele sunt egale cu o aceeaşi constantă reală, pe care o vom nota cu λ. Aşadar

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\cdot\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda.$$

Obținem astfel două ecuații diferențiale:

$$X''(x) - \lambda \cdot X(x) = 0, \tag{6}$$

$$T''(t) - \lambda a^2 \cdot T(t) = 0. \tag{7}$$

Vom arăta că ecuația (6) are soluții nenule numai dacă $\lambda < 0$. Într-adevăr, ecuația caracteristică a ecuației diferențiale (6) este $r^2 - \lambda = 0$. Dacă $\lambda > 0$, această ecuație are rădăcinile $r_1 = \sqrt{\lambda}$ şi $r_2 = -\sqrt{\lambda}$, deci soluția generală a ecuației (6) va fi

$$X(x) = C_1 \cdot e^{x\sqrt{\lambda}} + C_2 \cdot e^{-x\sqrt{\lambda}}.$$

Condițiile (5) conduc la $C_1 = C_2 = 0$, deci $X(x) = 0$, $\forall x \in (0,l)$. În consecință, $u(x,t) = 0$, o astfel de soluție neavând sens fizic. Dacă $\lambda = 0$, atunci $X(x) = C_1 \cdot x + C_2$. Din nou, folosind condițiile (5) rezultă că $u(x,t) = 0$, soluție neacceptabilă.

Prin urmare, rezultă că $\lambda < 0$. Fie $\lambda = -\mu^2$, $\mu > 0$. Soluția generală a ecuației (6) va fi

$$X(x) = C_1 \cdot \cos \mu x + C_2 \cdot \sin \mu x. \tag{8}$$

Din (5) obținem $C_1 = X(0) = 0$ şi $C_2 \cdot \sin \mu l = X(l) = 0$. Cum $C_2 \neq 0$, pentru că altfel am ajunge din nou la soluția nulă, deducem că $\sin \mu l = 0$, deci $\mu l = n\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$. În final, rezultă că ecuația (6) are o infinitate de soluții

$$X_n(x) = C_n \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Înlocuind $\mu = \dfrac{n\pi}{l}$ în ecuația (7), obținem soluția generală:

$$T_n(t) = D_n \cdot \cos n\frac{\pi a}{l} + E_n \cdot \sin n\frac{\pi a}{l}, \ \ n \in \mathbb{N}^*,$$

unde D_n şi F_n sunt constante arbitrare.

În sfârşit, dacă notăm $A_n = C_n \cdot D_n$, $B_n = C_n \cdot E_n$, obținem soluția ecuației (1) cu condițiile la limită (2) :

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = \left(A_n \cdot \cos n\frac{\pi a}{l}t + B_n \cdot \sin n\frac{\pi a}{l}t \right) \cdot \sin n\frac{\pi}{l}x \text{ , } n \in \mathbb{N}^* .$$

Aplicăm *principiul suprapunerii efectelor* care afirmă că, dacă seria $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ este convergentă, atunci suma sa $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$ este, de asemenea, soluție pentru problema (1)-(2). Vom presupune, în plus, că această serie este şi derivabilă termen cu termen de două ori în raport cu x respectiv t. Conform principiului suprapunerii efectelor, rezultă că funcția

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot \cos n\frac{\pi a}{l}t + B_n \cdot \sin n\frac{\pi a}{l}t \right) \cdot \sin n\frac{\pi}{l}x \tag{9}$$

satisface ecuația (1) şi condițiile la limită (2). Rămâne să determinăm constantele A_n şi B_n din condițiile inițiale (3). Din aceste condiții rezultă că

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin n\frac{\pi}{l}x .$$

Prelungind prin imparitate funcția $f:[0,l] \to \mathbb{R}$ pe intervalul $[-l,0]$ şi dezvoltând această prelungire în serie de sinuşi, obținem

$$A_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \sin n\frac{\pi}{l}x \, \mathrm{d}x \text{ , } n \in \mathbb{N}^* . \tag{10}$$

Pe de altă parte

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\pi a}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n\left(-A_n \cdot \sin n\frac{\pi a}{l}t + B_n \cdot \cos n\frac{\pi a}{l}t \right) \cdot \sin n\frac{\pi}{l}x \text{ ,}$$

deci, folosind (3), rezultă că

$$g(x) = \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{\pi a}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} nB_n \cdot \sin n\frac{\pi}{l}x .$$

Procedând ca şi în cazul funcției f, găsim

$$n\frac{\pi a}{l} \cdot B_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l g(x) \sin n\frac{\pi}{l}x \, \mathrm{d}x \text{ , } n \in \mathbb{N}^* \text{,}$$

deci

$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \cdot \int_0^l g(x) \sin n\frac{\pi}{l} x \, \mathrm{d}x, \; n \in \mathbb{N}^*. \tag{11}$$

Se poate arăta că, dacă $f, g \in \mathscr{C}^{(2)}$, atunci seria (13) în care coeficienții A_n şi B_n au expresiile (10) şi (11), este uniform convergentă pe $[0,l]$, deci derivabilă termen cu termen pe acest interval.

Aşadar, soluția problemei (1)-(3) este furnizată de (9), unde A_n şi B_n dați de (10) respectiv (11). Mai mult se poate demonstra unicitatea soluției.

Observația 5.2.2. Fiecare termen al seriei (9), adică funcția

$$u_n(x,t) = \left(A_n \cdot \cos n\frac{\pi a}{l} t + B_n \cdot \sin n\frac{\pi a}{l} t \right) \cdot \sin n\frac{\pi}{l} x, \; n \in \mathbb{N}^*,$$

descrie una din mişcările simple posibile ale coardei fixate în punctele 0 şi l, numite *oscilații proprii* ale coardei. Fie $\omega_n = n\frac{\pi a}{l}$. Oscilația unui punct al coardei în mişcarea descrisă de u_n are perioada principală

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2l}{na},$$

deci este independentă de x, fiind aceeaşi pentru toate punctele coardei. Amplitudinea acestei oscilații este

$$\sqrt{A_n^2 + B_n^2} \cdot \left| \sin n\frac{\pi}{l} x \right|$$

şi este variabilă, depinzând de x. Amplitudinea maximă se realizează când $\sin n\frac{\pi}{l} x = \pm 1$.

Astfel de puncte există. De exemplu, dacă $n = 1$, $x = \frac{l}{2}$; dacă $n = 2$, $x = \frac{l}{4}, \frac{l}{2}, \frac{3l}{4}$ etc. Amplitudinea maximă $\sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ se numeşte *amplitudinea vibrației coardei*. Înălțimea sunetului este cu atât mai mare cu cât perioada este mai mică, iar intensitatea sunetului este direct proporțională cu amplitudinea. Fiecare vibrație a coardei corespunde unui ton simplu. Sunetul emis de o coardă vibrantă este o suprapunere de tonuri simple. *Tonul fundamental* este tonul de intensitate maximă, deci cel care are amplitudinea maximă şi acesta este tonul care corespunde soluției $u_1(x,t)$. Celelalte tonuri de intensitate mai mică şi de înălțime mai mare se suprapun peste tonul fundamental creând ceea ce numim *timbrul* sunetului.

Exemplul 5.2.2.1. Să se determine soluția ecuației

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

cu condițiile la limită

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \ \forall t \in [0,\infty)$$

şi condițiile inițiale

$$u(x,0) = hx(l-x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \ \forall x \in [0,l].$$

Ținând seama de (13), soluția problemei este

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cdot \cos n \frac{\pi a}{l} t + B_n \cdot \sin n \frac{\pi a}{l} t \right) \cdot \sin n \frac{\pi}{l} x.$$

În acest caz, în condiția (3) avem $g(x) = 0$, deci $B_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Atunci

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos n \frac{\pi a}{l} t \cdot \sin n \frac{\pi}{l} x,$$

deci

$$hx(l-x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin n \frac{\pi}{l} x.$$

În consecință,

$$A_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l hx(l-x) \sin n \frac{\pi}{l} x \, \mathrm{d}x.$$

Obținem

$$A_{2m} = 0, \ \forall m \in \mathbb{N}^*$$

$$A_{2m+1} = \frac{8l^2 h}{\pi^3 (2m+1)^3}, \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Aşadar, soluția ecuației este

$$u(x,t) = \frac{8l^2 h}{\pi^3} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3} \cdot \cos(2m+1) \frac{\pi a}{l} t \cdot \sin(2m+1) \frac{\pi}{l} x.$$

5.2.3. Ecuația neomogenă a coardei vibrante

Această ecuație descrie micile vibrații forțate (întreținute).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \tag{1}$$

cu condițiile la limită

$$u(0,t) = u(l,t) = 0\,,\ \forall t \in [0,\infty) \tag{2}$$

şi condițiile inițiale

$$u(x,0) = f(x)\,,\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)\,,\ \forall x \in [0,l]\,. \tag{3}$$

Căutăm o soluție a ecuației (1) de forma

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)\,, \tag{4}$$

unde funcția v satisface ecuația cu derivate parțiale omogenă

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\,, \tag{5}$$

cu condițiile la limită

$$v(0,t) = v(l,t) = 0\,,\ \forall t \in [0,\infty) \tag{6}$$

şi condițiile inițiale

$$v(x,0) = f(x)\,,\ \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) = g(x)\,,\ \forall x \in [0,l]\,, \tag{7}$$

iar funcția w satisface ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F(x,t) \tag{8}$$

cu condițiile la limită

$$w(0,t) = w(l,t) = 0\,,\ \forall t \in [0,\infty) \tag{9}$$

şi condițiile inițiale

$$w(x,0) = 0\,,\ \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0\,,\ \forall x \in [0,l]\,. \tag{10}$$

Determinarea soluției problemei (1)-(3) se reduce la determinarea funcțiilor v şi w, satisfăcând (5)-(7) respectiv (8)-(10). Într-adevăr

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 (v+w)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F(x,t) =$$

$$= a^2 \frac{\partial^2 (v+w)}{\partial t^2} + F(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t)$$

şi

$$u(0,t) = v(0,t) + w(0,t) = 0\,,$$

$$u(l,t) = v(l,t) + w(l,t) = 0\,,$$

$$u(x,0) = v(x,0) + w(x,0) = f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \frac{\partial v}{\partial t}(x,0) + \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = g(x)\,.$$

Din secţiunea 5.2.2, avem

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cdot \cos n\frac{\pi a}{l}t + B_n \cdot \sin n\frac{\pi a}{l}t\right)\cdot \sin n\frac{\pi}{l}x\,, \tag{11}$$

unde

$$A_n = \frac{2}{l}\cdot\int_0^l f(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\,,\ n \in \mathbb{N}^*\,. \tag{12}$$

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\cdot\int_0^l g(x)\sin n\frac{\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\,,\ n \in \mathbb{N}^*\,. \tag{13}$$

Pentru a rezolva problema (8)-(10), căutăm soluţii de forma

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cdot \sin n\frac{\pi}{l}x\,. \tag{14}$$

Observăm că w dat de (14) satisface condiţiile la limită (9).

Punem condiţia ca w dat de (14) să satisfacă ecuaţia (8). Obţinem

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t)\cdot \sin n\frac{\pi}{l}x = a^2\sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\cdot\left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2}\right)\sin n\frac{\pi}{l}x + F(x,t)\,,$$

care se mai scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t) + a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)\right]\cdot \sin n\frac{\pi}{l}x = F(x,t)\,. \tag{15}$$

Presupunem că funcţia $F(x,t)$ se poate dezvolta în serie Fourier de sinuşi pe intervalul $[0,l]$, deci că

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t)\cdot \sin n\frac{\pi}{l}x\,, \tag{16}$$

unde

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{l}\cdot\int_0^l F(x,t)\sin n\frac{\pi}{l}x\,\mathrm{d}x\,,\ n \in \mathbb{N}^*\,. \tag{17}$$

Din (15), (16) şi (17), rezultă că funcțiile T_n trebuie să satisfacă ecuațiile diferențiale

$$T_n''(t)+a^2\frac{n^2\pi^2}{l^2}T_n(t)=\varphi_n(t)\,,\ \forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{18}$$

Pe de altă parte, din condiția $w(x,0)=0$, obținem că

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n(0)\sin n\frac{\pi}{l}x=0\,,$$

relație care implică

$$T_n(0)=0\,,\ \forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{19}$$

Pe de altă parte, din condiția $\frac{\partial w}{\partial t}(x,0)=0$ rezultă că

$$\frac{\pi}{l}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}n\ T_n'(0)\cdot\cos n\frac{\pi}{l}x=0\,,$$

deci

$$T_n'(0)=0\,,\ \forall n\in\mathbb{N}^*. \tag{20}$$

Prin urmare, funcțiile T_n se obțin în mod unic ca soluții ale ecuațiilor diferențiale cu coeficienți constanți (18), cu condițiile inițiale (19) şi (20). Cu funcțiile T_n astfel determinate, se obține soluția w dată de (14).

Exemplul 5.2.3.1. În cazul particular $F(x,t)=A\sin\omega t$, ecuația (8) devine

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\cdot\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+A\sin\omega t\,.$$

Conform (17):

$$\varphi_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l A\sin\omega t\cdot\sin n\frac{\pi}{l}x\ \mathrm{d}x=$$

$$=\frac{2A\sin\omega t}{l}\cdot\left(-\frac{l}{n\pi}\right)\cos n\frac{\pi}{l}x\Big|_o^l=\frac{2A}{n\pi}\cdot[1-(-1)^n]\cdot\sin\omega t\,.$$

Prin urmare

$$\varphi_n(t)=\begin{cases}0, & \text{dacă } n=2k,\ k\in\mathbb{N}^*\\ \dfrac{4A\sin\omega t}{(2k+1)\pi}, & \text{dacă } n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}\end{cases}.$$

Fie $k\in\mathbb{N}^*$. Ținând seama de (18) vom avea

$$T''_{2k}(t)+\frac{4a^2\pi^2}{l^2}\cdot k^2\cdot T_{2k}(t)=0\text{, dacă } n=2k. \tag{21}$$

Ecuația caracteristică este

$$r^2+\frac{4a^2\pi^2}{l^2}\cdot k^2=0.$$

În consecință, soluția ecuației diferențiale (21) este

$$T_{2k}(t)=\alpha_{2k}\cos k\frac{2\pi a}{l}t+\beta_{2k}\sin k\frac{2\pi a}{l}t,\ k\in\mathbb{N}^*.$$

Din (19) rezultă că $\alpha_{2k}=0$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$.

Atunci

$$T_{2k}(t)=\beta_{2k}\sin k\frac{2\pi}{l}t,\ \forall k\in\mathbb{N}^*.$$

Ținând seama de (20) rezultă că $\beta_{2k}=0$, $\forall k\in\mathbb{N}^*$. Atunci

$$T_{2k}(t)=0,\ \forall k\in\mathbb{N}^*.$$

Dacă $n=2k+1$, ecuațiile (33) devin

$$T''_{2k+1}(t)+(2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2}T_{2k+1}(t)=\frac{4A}{(2k+1)\pi}\sin\omega t,\ \forall k\in\mathbb{N}. \tag{22}$$

Soluția ecuației (22) va fi de forma

$$T_{2k+1}(t)=T_{GO}(t)+T_P(t),$$

unde T_{GO} este soluția generală a ecuației omogene corespunzătoare ecuației (22), adică

$$T''_{2k+1}(t)+(2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2}T_{2k+1}(t)=0,$$

iar T_P este o soluție particulară a ecuației (22). Este clar că

$$T_{GO}(t)=\gamma_{2k+1}\cdot\cos(2k+1)\frac{a\pi}{l}t+\delta_{2k+1}\cdot\sin(2k+1)\frac{a\pi}{l}t.$$

Căutăm soluția particulară a ecuației neomogene de forma

$$T_P(t)=\lambda\cdot\sin\omega t+\mu\cos\omega t.$$

Derivând de două ori şi introducând în (22), ajungem la

$$\left((2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)\cdot\lambda\cdot\sin\omega t+\left((2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)\cdot\mu\cdot\cos\omega t=\frac{4A}{(2k+1)\pi}\sin\omega t,$$

de unde obținem

$$\left(a^2\frac{(2k+1)^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)\cdot\lambda=\frac{4A}{(2k+1)\pi},$$

$$\left(a^2\frac{(2k+1)^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)\cdot\mu=0,$$

deci

$$\mu=0$$

şi

$$\lambda=\frac{4A}{(2k+1)\pi\left((2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)}.$$

În consecință,

$$T_P(t)=\frac{4A}{(2k+1)\pi\left((2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)}\sin\omega t,$$

deci

$$T_{2k+1}(t)=\gamma_{2k+1}\cdot\cos(2k+1)\frac{a\pi}{l}t+\delta_{2k+1}\cdot\sin(2k+1)\frac{a\pi}{l}t+$$

$$+\frac{4A}{(2k+1)\pi\left((2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)}\sin\omega t,\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Din (18) rezultă că

$$\gamma_{2k+1}=0,\ \forall k\in\mathbb{N},$$

iar din (19) rezultă că

$$\delta_{2k+1}\cdot(2k+1)\frac{a\pi}{l}t+\frac{4A\omega}{(2k+1)\pi\left((2k+1)^2\frac{a^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)}=0,$$

deci

$$\delta_{2k+1} = -\frac{4A\omega l}{a\ (2k+1)^2\pi^2\left((2k+1)^2\dfrac{a^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)}.$$

Conform (14) soluţia problemei considerate va fi

$$w(x,t) = \frac{-4A\omega l}{a\pi^2}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2\left((2k+1)^2\dfrac{a^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)}\cdot\sin(2k+1)\frac{a\pi}{l}t\cdot\sin(2k+1)\frac{\pi}{l}x+$$

$$+\frac{4A\sin\omega t}{\pi}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)\left((2k+1)^2\dfrac{a^2\pi^2}{l^2}-\omega^2\right)}\cdot\sin(2k+1)\frac{\pi}{l}x.$$

5.3. Ecuaţia propagării căldurii

Ecuaţia propagării căldurii este o ecuaţie de tip parabolic. Deşi este o ecuaţie relativ simplă, este întâlnită şi în studiul altor fenomene.

În planul xOu, considerăm o bară rectilinie, omogenă şi izotropă, conducătoare de căldură, situată pe axa Ox. Notăm cu $u(x,t)$ temperatura într-un punct $M(x,0)$ al barei la momentul t. Fie ρ densitatea barei, c căldura specifică a barei, k coeficientul de conducţie termică. În virtutea ipotezelor fizice, aceste mărimi sunt constante, nu depind de x. Fie, de asemenea, $F(x,t)$ intensitatea sursei termice în punctul M la momentul t. Calculând bilanţul termic corespunzător în intervalul de timp $[t,t+\Delta t]$ şi ţinând seama de legea lui Fourier, se poate arăta că funcţia u satisface ecuaţia

$$k\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F-c\rho\cdot\frac{\partial u}{\partial t}=0,$$

care se mai poate scrie sub forma

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t),$$

unde $a=\dfrac{k}{c\rho}>0$ şi $f(x,t)=\dfrac{F(x,t)}{c\rho}$. Cazul $f(x,t)=0$ indică lipsa surselor, ecuaţia corespunzătoare fiind stabilită de Fourier în 1822. Ca şi în cazul ecuaţiei undelor, pentru

descrierea completă a procesului de propagare a căldurii trebuie să fie date distribuția inițială a temperaturii în bară (condiția inițială) şi regimul termic la capetele barei (condiții la limită).

5.3.1. Propagarea căldurii într-o bară infinită

Considerăm o *bară infinită* omogenă, izolată termic, identificată cu axa Ox, care are la momentul inițial $t=0$ temperatura $\varphi(x)$. Fie $u(x,t)$ temperatura barei în punctul de abscisă x la momentul $t>0$. Problema matematică constă în determinarea funcției u care satisface ecuația

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

cu condiția inițială

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \forall x\in\mathbb{R}. \tag{2}$$

Problema (1), (2) se numeşte *problema lui Cauchy* pentru ecuația căldurii.

Vom admite că

$$\lim_{|x|\to\infty}u(x,t)=0,\quad \lim_{|x|\to\infty}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=0. \tag{3}$$

Aceste ipoteze nu contravin fenomenului fizic.

Pentru rezolvarea problemei de mai sus vom folosi transformata Fourier. Presupunem că funcțiile u şi φ sunt suficient de netede pentru a admite transformată Fourier. Fie $v(\omega,t)$ transformata Fourier a funcției $u=u(x,t)$ şi $\Phi(\omega)$ transformata Fourier a funcției $\varphi=\varphi(x)$, deci

$$v(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x,$$

$$\Phi(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x.$$

Folosind formula de derivare a integralei cu parametri, rezultă

$$\frac{\partial v}{\partial t}(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x.$$

Pe de altă parte, integrând de două ori prin părți şi folosind (3), obținem succesiv

$$v(\omega,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}}{-\mathrm{i}\omega}u(x,t)\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{i\omega}\left(\frac{e^{-\mathrm{i}\omega x}}{-\mathrm{i}\omega}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\Big|_{-\infty}^{\infty}+\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{(-\omega^2)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x\,.$$

Aşadar, avem relațiile

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=-\omega^2\cdot v(x,t)\,,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}(x,t)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\frac{\partial v}{\partial t}(x,t)$$

Având în vedere că u verifică ecuația (1), rezultă că

$$0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial u}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\frac{\partial v}{\partial t}+a^2\omega^2\cdot v\,.$$

Am obținut astfel o ecuație diferențială, a cărei soluție generală este

$$v(\omega,t)=Ce^{-a^2\omega^2 t}\,.$$

Cum

$$v(\omega,0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-\mathrm{i}\omega x}\mathrm{d}x=\Phi(\omega)\,,$$

rezultă că

$$v(\omega,t)=\Phi(\omega)\cdot e^{-a^2\omega^2 t}\,. \tag{4}$$

Pe de altă parte, am stabilit în cap. 4, §4.5, că transformata Fourier a funcției $e^{-\alpha x^2}$, $\alpha>0$, este $\frac{1}{\sqrt{2\alpha}}e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$. Notând $\alpha=\frac{1}{4a^2t}$, rezultă că $e^{-a^2\omega^2 t}=e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$, deci $e^{-a^2\omega^2 t}$ este transformata Fourier a funcției $f(x,t)=\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$.

Atunci $\sqrt{2\pi}\cdot\Phi(\omega)\cdot e^{-a^2\omega^2 t}$ este transformata Fourier a produsului de convoluție

$$(\varphi * f)(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cdot\frac{1}{a\sqrt{2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi\,.$$

Rezultă că

$$u(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{a\sqrt{2t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

În consecință,

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi\,, \qquad (5)$$

formulă cunoscută sub numele *formula integrală Poisson*.

Să considerăm acum cazul

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\varepsilon}, & \text{dacă } |x-x_0|<\varepsilon\\ 0, & \text{dacă } |x-x_0|\geq\varepsilon\end{cases},$$

deci φ se anulează în afara intervalului $(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$, iar în interiorul acestui interval temperatura are valoare constantă. Distribuția temperaturii în bară la momentul t este dată de formula lui Poisson, care în cazul de față devine

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi\,.$$

Folosind formula de medie, rezultă că există $\xi\in(x_0-\varepsilon,x_0+\varepsilon)$ astfel încât

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\frac{1}{2\varepsilon}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\cdot 2\varepsilon\,.$$

Atunci

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}=G(x,t,x_0)\,.$$

Pe de altă parte, observăm că

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varphi(x)=\delta(x)=\begin{cases}0, & \text{dacă } x\neq x_0\\ \infty, & \text{dacă } x=x_0\end{cases},$$

unde δ este *funcția generalizată a lui Dirac*.

Din punct de vedere fizic, această situație corespunde unei *surse instantanee de căldură* în punctul x_0. Temperatura într-un punct oarecare al barei, la momentul t, este dată de

$$G(x,t,x_0)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}},$$

În fig. 4, reprezentăm grafic funcția G pentru câteva valori ale lui t $(0<t_1<t_2<t_3)$.

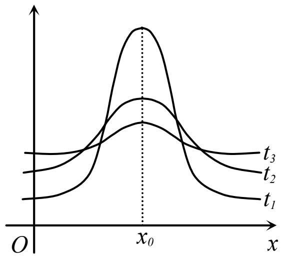


Fig. 4

Această expresie dă distribuția temperaturii în bară, când la momentul inițial apare în punctul x_0 o sursă instantanee de căldură. Vom putea spune că formula lui Poisson dă efectul total al distribuției inițiale de temperatură definită de funcția φ, efect care rezultă din însumarea acțiunilor unor surse instantanee de căldură răspândite pe toată bara.

Exemplul 5.3.1.1. Să presupunem acum că

$$\varphi(x)=\begin{cases} c, \text{ dacă } x\in[x_1,x_2] \\ 0, \text{ dacă } x\notin[x_1,x_2] \end{cases}.$$

Din formula lui Poisson obținem

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_1}^{x_2} c\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,\mathrm{d}\xi .$$

Făcând schimbarea de variabilă $\dfrac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}=\mu$, rezultă că

$$u(x,t)=\frac{c}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}}^{\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}} e^{-\mu^2}\,\mathrm{d}\mu . \tag{6}$$

Această soluție se poate exprima cu ajutorul *funcției lui Laplace*. Reamintim că funcția lui Laplace se definește astfel

$$L(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t,\ x\in\mathbb{R}.$$

Se verifică imediat că funcția L este impară, $L(0)=0$ şi $L(\infty)=1$. Această funcție este mult utilizată în Teoria Probabilităților şi, de aceea, este tabelată. Cu ajutorul funcției lui Laplace, soluția (6) se scrie

$$u(x,t)=\frac{c}{2}\left[L\left(\frac{x-x_2}{2a\sqrt{t}}\right)-L\left(\frac{x-x_1}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

5.3.2. Propagarea căldurii în bara finită

Problema matematică la care conduce studiul propagării căldurii în bara finită, se poate formula în modul următor.

Să se determine soluția ecuației cu derivate parțiale

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1}$$

cu condițiile la limită

$$u(0,t)=u(l,t)=0\,,\ \forall t\in[0,\infty) \tag{2}$$

şi condiția inițială

$$u(x,0)=\varphi(x)\,,\ \forall x\in[0,l]\,. \tag{3}$$

Conform condițiilor la limită (2), temperatura în capetele barei este nulă, iar condiția inițială (3) indică faptul că, la momentul inițial de timp, temperatura barei se exprimă prin funcția φ. Vom presupune că funcția φ este nenulă şi continuă pe intervalul $[0,l]$. Din (2) şi (3) rezultă că funcția φ trebuie să satisfacă egalitatea

$$\varphi(0)=0\,.$$

Ca şi în cazul coardei vibrante finite, vom folosi *metoda separării variabilelor a lui Fourier*, însoțită de *principiul suprapunerii efectelor*.

Căutăm soluții ale ecuației (1) de forma

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t)\,. \tag{4}$$

Din condițiile la limită (2) deducem

$$\begin{cases} X(0)\cdot T(t)=0 \\ X(l)\cdot T(t)=0 \end{cases},$$

pentru orice $t > 0$. Atunci

$$X(0) = X(l) = 0, \tag{5}$$

deoarece în caz contrar ar rezulta $T(t) = 0$, pentru orice $t > 0$, deci $u(x,t) \equiv 0$, ceea ce contravine condițiilor inițiale.

Punând condiția ca funcția u dată de (4) să verifice ecuația (1), obținem

$$X(x) \cdot T'(t) = a^2 \cdot X''(x) \cdot T(t), \ \forall x \in [0,l], \ \forall t \in [0,\infty).$$

sau

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)}, \ \forall x \in [0,l], \ \forall t \in [0,\infty).$$

Atunci

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = \mu,$$

unde μ este o constantă reală.

Obținem astfel două ecuații diferențiale:

$$X''(x) - \mu \cdot X(x) = 0, \tag{6}$$

$$T'(t) - \mu a^2 \cdot T(t) = 0. \tag{7}$$

Vom arăta că ecuația (7) are soluții nenule numai dacă $\mu < 0$. Într-adevăr, soluția generală a acestei ecuații este

$$T(t) = Ce^{\mu a^2 t}.$$

Dacă $\mu > 0$, atunci $|T(t)| \to \infty$, când $t \to \infty$, deci, pornind cu o anumită distribuție a temperaturii în bară, când t creşte valoarea absolută a temperaturii ar putea depăşi orice valoare pozitivă, fapt inacceptabil din punct de vedere fizic. Pentru $\mu = 0$, T s-ar reduce la o constantă, adică temperatura ar rămâne aceeaşi în orice punct al barei, fapt de asemenea inacceptabil. Prin urmare, $\mu = -\lambda^2 < 0$ şi soluția generală a ecuației (7) devine

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 a^2 t}. \tag{8}$$

Pe de altă parte, în acest caz, ecuația caracteristică a ecuației diferențiale (6) este $r^2 + \lambda^2 = 0$, deci soluția generală a acestei ecuații va fi

$$X(x) = C \cdot \cos \lambda x + D \cdot \sin \lambda x. \tag{9}$$

Din (5) deducem $C = X(0) = 0$ şi $D \cdot \sin \lambda l = X(l) = 0$. Cum $D \neq 0$, pentru că altfel am ajunge la soluția nulă, rezultă că $\sin \lambda l = 0$, deci $\lambda l = n\pi$, $n \in \mathbb{N}^*$. În final, rezultă că ecuația (6), cu condițiile la limită (5), are o infinitate de soluții

$$X_n(x) = D_n \cdot \sin \frac{n\pi}{l} x,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, soluția corespunzătoare a ecuației (7) este

$$T(t) = C_n \cdot e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{l^2} t}.$$

Notând $A_n = C_n \cdot D_n$, rezultă că funcțiile de forma (4) care verifică ecuația (1) şi condițiile la limită (2) sunt

$$u_n(x,t) = X_n(x) \cdot T_n(t) = A_n \cdot e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{l^2} t} \cdot \sin n \frac{\pi}{l} x,\ n \in \mathbb{N}^*.$$

Aplicând *principiul suprapunerii efectelor* rezultă că

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{l^2} t} \cdot \sin n \frac{\pi}{l} x \tag{10}$$

este soluția ecuației (1) cu condițiile la limită (2). Rămâne să determinăm constantele A_n din condiția inițială (3). Din această condiție rezultă că

$$\varphi(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin n \frac{\pi}{l} x.$$

Prelungind prin imparitate funcția $\varphi : [0,l] \to \mathbb{R}$ pe intervalul $[-l,0]$ şi dezvoltând această prelungire în serie de sinuşi, obținem

$$A_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l \varphi(x) \sin n \frac{\pi}{l} x \,\mathrm{d}x,\ n \in \mathbb{N}^*. \tag{11}$$

Aşadar, soluția problemei (1)-(3) este furnizată de (10), unde coeficienții A_n sunt dați de (11).

5.3.3. Bara neomogenă

Problema matematică care guvernează fenomenul este descrisă de ecuația

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t) \tag{1}$$

cu condițiile la limită

$$u(0,t) = u(l,t) = 0,\ \forall t \in [0,\infty) \tag{2}$$

şi condiția inițială

$$u(x,0) = f(x),\ \forall x \in [0,l]. \tag{3}$$

Căutăm o soluție a ecuației (1) de forma

$$u(x,t) = v(x,t) + w(x,t), \tag{4}$$

unde funcția v satisface ecuația cu derivate parțiale omogenă

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \tag{5}$$

cu condițiile la limită

$$v(0,t) = v(l,t) = 0,\ \forall t \in [0,\infty) \tag{6}$$

şi condiția inițială

$$v(x,0) = f(x),\ \forall x \in [0,l], \tag{7}$$

iar funcția w satisface ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F(x,t) \tag{8}$$

cu condițiile la limită

$$w(0,t) = w(l,t) = 0,\ \forall t \in [0,\infty) \tag{9}$$

şi condiția inițială

$$w(x,0) = 0,\ \forall x \in [0,l]. \tag{10}$$

Determinarea soluției problemei (1)-(3) este rezolvată o dată cu determinarea funcțiilor v şi w, satisfăcând (5)-(7) respectiv (8)-(10). Într-adevăr

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial (v+w)}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + F(x,t) =$$

$$= a^2 \frac{\partial^2 (v+w)}{\partial t^2} + F(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x,t)$$

şi

$$u(0,t) = v(0,t) + w(0,t) = 0,$$

$$u(l,t) = v(l,t) + w(l,t) = 0,$$

$$u(x,0) = v(x,0) + w(x,0) = f(x).$$

Din secțiunea anterioară, avem

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot e^{-n^2 \frac{\pi^2 a^2}{l^2} t} \cdot \sin n\frac{\pi}{l}x, \tag{11}$$

unde

$$A_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f(x) \sin n\frac{\pi}{l}x \,\mathrm{d}x, \ n \in \mathbb{N}^*. \tag{12}$$

Pentru a rezolva problema (8)-(10), căutăm soluții de forma

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot \sin n\frac{\pi}{l}x. \tag{13}$$

Observăm că w dat de (13) satisface condițiile la limită (9).

Punând condiția ca w dat de (13) să satisfacă ecuația (8), obținem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) \cdot \sin n\frac{\pi}{l}x = a^2 \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \cdot \left(-\frac{n^2\pi^2}{l^2} \right) \sin n\frac{\pi}{l}x + F(x,t),$$

care se mai scrie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[T_n'(t) + a^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} T_n(t) \right] \cdot \sin n\frac{\pi}{l}x = F(x,t). \tag{14}$$

Presupunem că funcția $F(x,t)$ se poate dezvolta în serie Fourier de sinuşi pe intervalul $[0,l]$, deci că

$$F(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t) \cdot \sin n\frac{\pi}{l}x, \tag{15}$$

unde

$$\varphi_n(t) = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l F(x,t) \sin n\frac{\pi}{l}x \,\mathrm{d}x, \ n \in \mathbb{N}^*. \tag{16}$$

Din (14), (15) şi (16), rezultă că funcțiile T_n trebuie să satisfacă ecuațiile diferențiale de ordinul întâi

$$T_n'(t) + a^2 \frac{n^2\pi^2}{l^2} T_n(t) = \varphi_n(t), \ \forall n \in \mathbb{N}^*, \tag{17}$$

care admit soluțiile

$$T_n(t) = e^{-\int_0^t \left(\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}\right) d\tau} \left(C_n + \int_0^t \varphi_n(\tau) e^{\int_0^t \frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2} d\tau} \mathrm{d}\tau \right), \ n \in \mathbb{N}^*, \quad (18)$$

constantele C_n urmând a fi determinate.

Pe de altă parte, din condiția $w(x,0) = 0$, rezultă că

$$\sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin n \frac{\pi}{l} x = 0$$

şi mai departe că:

$$T_n(0) = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (19)$$

În consecință, ținând seama de (18), deducem că

$$C_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}^*,$$

deci

$$T_n(t) = \int_0^t \varphi_n(\tau) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}(t-\tau)} \mathrm{d}\tau, \ n \in \mathbb{N}^*.$$

Conform (13), avem

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^t \varphi_n(\tau) e^{-\frac{a^2 n^2 \pi^2}{l^2}(t-\tau)} \mathrm{d}\tau \right) \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (20)$$

5.4. Ecuații de tip eliptic

Ecuațiile de tip eliptic descriu procese staționare (în care funcția necunoscută nu depinde de timp).

Ecuația lui Laplace în plan este

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (1)$$

iar ecuația lui Laplace în spațiu este

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0,$$

necunoscuta fiind funcția u. Dacă intervin forțe externe, acțiunea acestora fiind descrisă de o funcție f, procesele fizice corespunzătoare sunt descrise de *ecuația lui Poisson*

$$\Delta u = f\ . \tag{2}$$

Din câte s-a observat în cazul ecuaţiilor de tip hiperbolic şi parabolic, pentru descrierea completă a unui proces fizic este necesar ca, în afară de ecuaţia acestui proces, să specificăm condiţii suplimentare: condiţii iniţiale şi condiţii la limită (pe frontiera domeniului). Din punct de vedere matematic, această necesitate decurge din faptul că soluţiile acestor ecuaţii nu sunt unice. Astfel, chiar şi în cazul ecuaţiilor diferenţiale ordinare de ordinul n, soluţia generală depinde de n constante arbitrare. În cazul ecuaţiilor cu derivate parţiale soluţia va depinde, în general, de funcţii arbitrare (a se vedea, de exemplu, soluţia generală a ecuaţiilor de tip hiperbolic). Din această cauză, pentru a pune în evidenţă soluţia care descrie procesul fizic real, sunt necesare condiţii suplimentare. Pentru ecuaţiile de tip eliptic aceste condiţii suplimentare sunt *condiţiile pe frontieră*, problema corespunzătoare numindu-se *problemă la limită*.

În cele ce urmează ne vom ocupa de ecuaţia lui Laplace în plan. Putem considera două tipuri de domenii: mărginite şi nemărginite. În ambele cazuri vom presupune că frontiera este formată dintr-o curbă netedă pe porţiuni. Problema la limită pentru ecuaţia eliptică se numeşte *interioară* dacă funcţia căutată trebuie să fie definită într-un domeniu mărginit şi *exterioară* dacă funcţia căutată trebuie să fie definită într-un domeniu nemărginit.

Fie $G \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit a cărui frontieră C este o curbă netedă pe porţiuni.

Deşi sunt valabile pentru ecuaţia lui Laplace în general, noi vom prezenta tipurile de probleme la limită pentru această ecuaţie în plan. Acestea sunt:

Problema Dirichlet interioară. Această problemă constă în determinarea unei funcţii $u \in \mathscr{C}^2(G) \cap \mathscr{C}^1(\overline{G})$, armonică în G (deci care verifică ecuaţia (1)), dacă se cunosc valorile acesteia pe frontiera C a domeniului:

$$u\big|_C = f\ , \tag{3}$$

unde f este o funcţie dată, continuă pe C.

Problema Neumann interioară constă în determinarea unei funcţii $u \in \mathscr{C}^2(G) \cap \mathscr{C}^1(\overline{G})$, armonică în G, astfel încât

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = g\ , \tag{4}$$

unde $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ este derivata după normala exterioară la curba C, iar g este o funcție dată, continuă pe C.

Problema mixtă constă în determinarea unei funcții $u \in \mathscr{C}^2(G) \cap \mathscr{C}^1(\bar{G})$, armonică în G, astfel încât

$$\alpha \cdot u + \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_C = h, \tag{5}$$

α şi h fiind funcții date, continue pe C, $\alpha \geq 0$.

Vom stabili acum o formulă integrală utilă în cele ce urmează. Fie $v \in \mathscr{C}^2(G) \cap \mathscr{C}^1(\bar{G})$. Atunci

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + v \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + v \cdot \Delta u .$$

Integrând pe G, obținem

$$\iint_G \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_G \left(v \cdot \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Din formula lui Green-Riemann rezultă

$$\iint_G \left(v \cdot \Delta u + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_C (-v) \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \mathrm{d}x + v \cdot \frac{\partial u}{\partial x} \mathrm{d}y , \tag{6}$$

cunoscută sub numele de *formula integrală Green*.

În continuare, vom studia probleme la limită standard pentru ecuația lui Laplace în plan.

5.4.1. Problema lui Dirichlet interioară pentru disc

Fie $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 < r^2\}$ şi $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = r^2\}$, frontiera orientată pozitiv a domeniului G. Problema Dirichlet interioară pentru ecuația lui Laplace constă în a determina funcția continuă $u : \bar{G} \to \mathbb{R}$ care satisface ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ \forall (x,y)\in G, \tag{7}$$

cu condiția la frontieră

$$u\big|_C = f, \tag{8}$$

unde f este o funcție dată, continuă pe C.

Vom arăta că dacă problema (7)-(8) admite o soluție, atunci această soluție este unică.

Într-adevăr, dacă problema ar admite două soluții u_1, u_2 și $v=u_1-u_2$, rezultă că $\Delta v=0$ și $v\big|_C=0$. Făcând $u=v$ în formula integrală Green (6), obținem

$$\iint_G\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

Prin urmare,

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\right)^2=0,\ \forall (x,y)\in G,$$

deci

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=0,\ \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)=0,\ \forall (x,y)\in G.$$

În consecință, funcția v este constantă și cum se anulează pe C, rezultă că $v=0$, deci $u_1=u_2$ pe G.

Soluția fiind unică, nu contează metoda folosită pentru obținerea soluției. Vom folosi metoda separării variabilelor (Fourier). Din cauza simetriei centrale față de origine a problemei, vom trece la coordonate polare în plan. Fie ρ și θ coordonatele polare ale punctului (x,y), deci

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \end{cases}.$$

În urma acestei schimbări de variabile, ecuația (7) devine

$$\rho^2\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}+\rho\cdot\frac{\partial u}{\partial \rho}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0. \tag{9}$$

Problema (7)-(8) se reformulează astfel: să se determine funcţia $u(\rho,\theta)$, $u:[0,r]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, care satisface ecuaţia (9) şi condiţia la frontieră

$$u(\rho,\theta)\big|_{\rho=r}=f(\theta), \tag{10}$$

unde funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este continuă, nenulă, periodică de perioadă 2π şi este presupusă cunoscută.

De remarcat că, dacă $f\equiv 0$ atunci problema corespunzătoare admite soluţia $u\equiv 0$.

Acesta este motivul pentru care putem presupune că funcţia f este nenulă.

Conform metodei separării variabilelor, căutăm soluţii ale ecuaţiei (9) de forma

$$u(\rho,\theta)=R(\rho)\cdot T(\theta), \tag{11}$$

unde funcţiile R şi T sunt de clasă $\mathscr{C}^2$. În plus, funcţia T este presupusă periodică de perioadă 2π. Punând condiţia ca funcţia u dată de (11) să verifice ecuaţia (9), obţinem

$$\rho^2\cdot R''(\rho)\cdot T(\theta)+\rho\cdot R'(\rho)\cdot T(\theta)=-R(\rho)\cdot T''(\theta)$$

sau

$$\frac{\rho^2\cdot R''(\rho)+\rho\cdot R'(\rho)}{R(\rho)}=-\frac{T''(\theta)}{T(\theta)}=k, \tag{12}$$

unde k este o constantă.

Din (6) rezultă următoarele ecuaţii diferenţiale:

$$T''(t)+k\cdot T(t)=0, \tag{13}$$

$$\rho^2\cdot R''(\rho)+\rho\cdot R'(\rho)-k\cdot R(\rho)=0, \tag{14}$$

Când constanta este $-\lambda^2$, $\lambda>0$, (13) devine

$$T''(t)-\lambda^2\cdot T(t)=0.$$

Soluţia generală a acestei ecuaţii diferenţiale este

$$T(\theta)=C_1\cdot e^{\lambda\theta}+C_2\cdot e^{-\lambda\theta},$$

C_1 şi C_2 fiind constante. Această soluţie este periodică numai dacă $C_1=C_2=0$, adică doar dacă $T\equiv 0$, ceea ce ar însemna că funcţia f este nulă, ceea ce contravine ipotezei. Prin urmare constanta în (12) nu poate fi negativă.

Dacă $k=0$, din (13) va rezulta că $T(\theta)=C_1\cdot\theta+C_2$, care este periodică numai dacă $C_1=0$. Aşadar, în acest caz, avem soluţia

$$T_0(\theta)=C_0. \tag{15}$$

Totodată, ecuația (14) se mai scrie sub forma $\left(\rho\cdot R'(\rho)\right)'=0$, de unde $\rho\cdot R'(\rho)=C$, deci $R(\rho)=C\cdot\ln\rho+D$. Cum $\ln\rho$ nu are sens în 0, rezultă că $C=0$, deci putem pune

$$R_0(\rho)=F_0 \text{ (constant).} \tag{16}$$

Notând $A_0=C_0F_0$, soluția de forma (11) a ecuației (9), pentru $k=0$, este

$$u_0(\rho,\theta)=A_0. \tag{17}$$

Când constanta este $k=\lambda^2$, $\lambda>0$, din (13) obținem

$$T''(t)+\lambda^2\cdot T(t)=0,$$

a cărei soluție generală este

$$T(\theta)=C_1\cdot\cos\lambda\theta+C_2\cdot\sin\lambda\theta,$$

C_1 şi C_2 fiind constante. Din condiția de periodicitate rezultă că trebuie să avem

$$T(\theta+2\pi)=T(\theta),$$

deci $\lambda(\theta+2\pi)=\lambda\theta+2n\pi$, $n\in\mathbb{N}^*$. În consecință, $\lambda=n$, $n\in\mathbb{N}^*$. Atunci

$$T_n(\theta)=C_n\cdot\cos n\theta+D_n\cdot\sin n\theta,\ n\in\mathbb{N}^*. \tag{18}$$

Fie $n\in\mathbb{N}^*$ fixat. Ținând seama de (14) şi cum $k=n^2$, obținem că funcția $R_n(\rho)$ trebuie să verifice următoarea ecuație diferențială de tip Euler

$$\rho^2\cdot R_n''(\rho)+\rho\cdot R_n'(\rho)-n^2R_n(\rho)=0. \tag{19}$$

Pentru a găsi soluția acestei ecuații, facem schimbarea de variabilă $\rho=e^{\varphi}$. Atunci:

$$R_n'(\rho)=e^{-\varphi}\frac{\mathrm{d}R_n}{\mathrm{d}\varphi}$$

şi

$$R_n''(\rho)=e^{-2\varphi}\left(\frac{\mathrm{d}^2R_n}{\mathrm{d}\varphi^2}-\frac{\mathrm{d}R_n}{\mathrm{d}\varphi}\right).$$

Înlocuind în (19), obținem ecuația diferențială liniară cu coeficienți constanți

$$\frac{\mathrm{d}^2R_n}{\mathrm{d}\varphi^2}-n^2R_n=0.$$

Ecuația caracteristică a acestei ecuații diferențiale este $r^2-n^2=0$ şi are soluțiile $r_1=n$, $r_2=-n$, deci soluția generală a ecuației diferențiale cu coeficienți constanți este

$$R_n(\varphi)=F_ne^{n\varphi}+E_ne^{-n\varphi}.$$

Prin urmare, soluția generală a ecuației (19) este

$$R_n(\rho) = F_n\rho^n + E_n\rho^{-n},$$

unde E_n şi F_n sunt constante arbitrare.

Dacă $E_n \neq 0$, rezultă că $R_n(\rho) \to \pm\infty$ când $\rho \to 0$, deci funcția $u_n(\rho,\theta)$ ar tinde la infinit spre centrul cercului, ceea ce contrazice faptul că funcția $u_n(\rho,\theta) = R_n(\rho)\cdot T_n(\theta)$ este continuă. În consecință, $E_n = 0$, deci

$$R_n(\rho) = F_n \cdot \rho^n. \tag{20}$$

Notând $A_n = C_nF_n$, $B_n = D_nF_n$, $n\in \mathbb{N}^*$, obținem soluțiile

$$u_n(\rho,\theta) = (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)\cdot \rho^n,\ n\in \mathbb{N}^*. \tag{21}$$

Conform "principiului suprapunerii efectelor", în ipoteza convergenței, seria $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(\rho,\theta)$ va fi soluția problemei Dirichlet. Vom presupune că această serie este convergentă şi este derivabilă termen cu termen de două ori în raport cu ρ respectiv θ.

Fie deci:

$$u(\rho,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)\cdot \rho^n. \tag{22}$$

Este uşor de văzut că această funcție verifică ecuația (9). Condiția la frontieră (10) va fi satisfăcută dacă şi numai dacă

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)\cdot r^n = f(\theta).$$

Prin ipoteză, f se poate dezvolta în serie Fourier pe intervalul $[0,2\pi]$, deci

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi)\mathrm{d}\varphi, \tag{23}$$

$$r^n\cdot A_n = \frac{1}{\pi}\cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi)\ \cos n\varphi\ \mathrm{d}\varphi, \qquad r^n\cdot B_n = \frac{1}{\pi}\cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi)\ \sin n\varphi\ \mathrm{d}\varphi.$$

Atunci

$$A_n = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{r^n}\cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi)\ \cos n\varphi\ \mathrm{d}\varphi, \quad B_n = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{r^n}\cdot \int_0^{2\pi} f(\varphi)\ \sin n\varphi\ \mathrm{d}\varphi. \tag{24}$$

Prin urmare, soluția problemei (9)-(10) este dată de (22), unde coeficienții A_n, $n\in \mathbb{N}$, B_n, $n\in \mathbb{N}^*$ sunt dați de (23) respectiv (24).

În cele ce urmează vom scrie soluția (22) sub o altă formă, utilizată frecvent în aplicații.

Ținând seama de formulele (22)-(24)

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n(\cos n\varphi\cos n\theta+\sin n\varphi\sin n\theta)\right]\cdot f(\varphi)\mathrm{d}\varphi=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\cos n(\varphi-\theta)\right]\cdot f(\varphi)\mathrm{d}\varphi. \tag{25}$$

Pentru a prelucra această formulă, să remarcăm că ar trebui găsită o formulă pentru calculul sumei seriei $\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos n\alpha$, cu $|a|<1$. Această serie este partea reală a seriei $\sum_{n=1}^{\infty}a^n e^{\mathrm{i}n\alpha}$ care este o serie geometrică cu rația $q=ae^{\mathrm{i}\alpha}$, unde $|q|<1$. În consecință

$$\sum_{n=1}^{\infty}a^n e^{\mathrm{i}n\alpha}=\frac{ae^{\mathrm{i}\alpha}}{1\text{-}ae^{\mathrm{i}\alpha}}=\frac{a}{e^{-\mathrm{i}\alpha}-a}=a\cdot\frac{\cos\alpha-a+\mathrm{i}\sin\alpha}{(\cos\alpha-a)^2+\sin^2\alpha}$$

Prin urmare,

$$\sum_{n=1}^{\infty}a^n\cos n\alpha=\frac{a\cos\alpha-a^2}{1-2a\cos\alpha+a^2},$$

deci

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n\cdot\cos n(\varphi-\theta)=\frac{\rho r\cos(\varphi-\theta)-\rho^2}{r^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}.$$

Înlocuind în (25), obținem că formula (22) se scrie sub forma

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2-\rho^2}{r^2-2\rho r\cos(\varphi-\theta)+\rho^2}\cdot f(\varphi)\mathrm{d}\varphi, \tag{26}$$

formulă cunoscută sub numele de *formula lui Poisson*.

Exemplul 5.4.1. Fie domeniul $G=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2<9\}$ a cărui frontieră orientată pozitiv este $C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=9\}$. Să se găsească soluția u a problemei Dirichlet interioare pentru ecuația lui Laplace cu condiția la frontieră

$$u(3,\theta)=\cos\theta+2\sin\theta.$$

Folosim formulele (22)-(24). Obținem

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + 2\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi = 0,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + 2\sin\varphi)\ \cos n\varphi\ \mathrm{d}\varphi,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{3^n} \cdot \int_0^{2\pi} (\cos\varphi + 2\sin\varphi)\ \sin n\varphi\ \mathrm{d}\varphi.$$

Dacă $n \neq 1$, atunci $A_n = 0$, $B_n = 0$. De asemenea, $A_1 = \frac{1}{3}$, $B_1 = \frac{2}{3}$. Ținând seama de (22), rezultă că

$$u(\rho,\theta) = \frac{1}{3}\rho\cos\theta + \frac{2}{3}\rho\sin\theta,$$

deci

$$u(x,y) = \frac{x+2y}{3}.$$

5.4.2. Problema lui Dirichlet pentru semiplan

Fie G semiplanul superior, deci $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y > 0\}$. Problema Dirichlet pentru ecuația lui Laplace, în semiplanul superior, constă în a determina funcția mărginită, de clasă $\mathscr{C}^2$, $u : \overline{G} \to \mathbb{R}$, care satisface ecuația

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \forall (x,y) \in G, \tag{1}$$

cu condiția la frontieră

$$u(x,0) = g(x),\ x \in \mathbb{R}, \tag{2}$$

unde g este o funcție dată, nenulă, continuă şi mărginită pe axa Ox.

Vom folosi metoda separării variabilelor (Fourier). Conform metodei separării variabilelor, căutăm soluții ale ecuației (1) de forma

$$u(x,y) = X(x) \cdot Y(y), \tag{3}$$

unde X şi Y sunt funcții de clasă $\mathscr{C}^{(2)}$. Punând condiția ca funcția u dată de (3) să verifice ecuația (1), obținem

$$X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) = 0$$

sau

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=k\,, \tag{4}$$

unde k este o constantă. Din (4) rezultă următoarele ecuații diferențiale:

$$X''(x)-k\cdot X(x)=0\,, \tag{5}$$

$$Y''(y)+k\cdot Y(y)=0\,, \tag{6}$$

Când constanta este $k=\lambda^2$, $\lambda>0$, (5) devine

$$X''(x)-\lambda^2\cdot X(x)=0\,.$$

Ecuația caracteristică a acestei ecuații diferențiale este $r^2-\lambda^2=0$ şi are soluțiile $r_1=\lambda$, $r_2=-\lambda$, deci, soluția generală a acestei ecuații diferențiale este

$$X_\lambda(x)=C(\lambda)\cdot e^{\lambda x}+D(\lambda)\cdot e^{-\lambda x}\,,$$

$C(\lambda)$ şi $D(\lambda)$ fiind constante. Dacă $C(\lambda)\neq 0$, rezultă că $X_\lambda(x)\to\pm\infty$ când $x\to\infty$, deci funcția

$$u_\lambda(x,y)=X_\lambda(x)\cdot Y_\lambda(y)\,,\ \lambda>0\,,$$

ar tinde la infinit când $x\to\infty$, ceea ce contrazice faptul că funcția u_λ este mărginită.

Prin urmare, $C(\lambda)=0$. Dacă $D(\lambda)\neq 0$, rezultă că $X_\lambda(x)\to\pm\infty$ când $x\to-\infty$, deci funcția u_λ ar tinde la infinit când $x\to-\infty$, ceea ce contrazice faptul că funcția u_λ este mărginită. În consecință, $D(\lambda)=0$, deci $u_\lambda(x,y)=0$, pentru orice (x,y). Această funcție nu satisface (2), deci constanta în (5) nu poate fi strict pozitivă.

Când $k=0$, din (5) şi (6) rezultă că $X_0(x)=C_1\cdot x+C_2$ şi $Y_0(y)=C_3\cdot y+C_4$. Când $|x|\to\pm\infty$, rezultă că $X_0(x)\to\pm\infty$, deci funcția $u_0(x,y)=X_0(x)\cdot Y_0(y)$ nu este mărginită, situație neconvenabilă.

Când constanta este $k=-\lambda^2$, $\lambda>0$, din (5) obținem

$$X''(x)+\lambda^2\cdot X(x)=0\,,$$

a cărei soluție generală este

$$X_\lambda(x)=C(\lambda)\cdot\cos\lambda x+D(\lambda)\cdot\sin\lambda x\,,$$

$C(\lambda)$ şi $D(\lambda)$ fiind constante.

Ecuația (6) devine

$$Y''(y)-\lambda^2\cdot Y(y)=0$$

şi are soluția generală

$$Y_\lambda(y) = F(\lambda)\cdot e^{\lambda y} + E(\lambda)\cdot e^{-\lambda y},$$

unde $E(\lambda)$ şi $F(\lambda)$ sunt constante arbitrare.

Dacă $F(\lambda)\neq 0$, rezultă că $Y_\lambda(y)\to\pm\infty$ când $y\to\infty$, deci funcția

$$u_\lambda(x,y) = X_\lambda(x)\cdot Y_\lambda(y)$$

ar tinde la infinit când $y\to\infty$, ceea ce contrazice faptul că funcția u_λ este mărginită.

În consecință, $F(\lambda)=0$, deci

$$Y(y;\lambda) = E(\lambda)\cdot e^{-\lambda y}. \tag{7}$$

Notând $A(\lambda)=C(\lambda)E(\lambda)$, $B(\lambda)=D(\lambda)E(\lambda)$, $\lambda>0$, obținem soluțiile

$$u_\lambda(x,y) = [A(\lambda)\cdot\cos\lambda x + B(\lambda)\cdot\sin\lambda x)\cdot e^{-\lambda y},\ \lambda>0. \tag{8}$$

Conform „principiului suprapunerii efectelor”, suma unor astfel de funcții şi, de asemenea, integrala în raport cu parametrul λ va fi soluție a ecuației (1):

$$u(x,y) = \int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\, e^{-\lambda y} d\lambda. \tag{9}$$

Într-adevăr, folosind teorema de derivare a integralelor cu parametru, obținem succesiv

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lambda\int_0^\infty [-A(\lambda)\sin\lambda x + B(\lambda)\cos\lambda x]\, e^{-\lambda y} d\lambda,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\lambda^2\int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\, e^{-\lambda y} d\lambda,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\lambda\int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\, e^{-\lambda y} d\lambda,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \lambda^2\int_0^\infty [A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x]\, e^{-\lambda y} d\lambda,$$

deci

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Funcțiile $A(\lambda)$ şi $B(\lambda)$ se vor determina din condiția (2):

$$u(x,0)=\int_0^{\infty}[A(\lambda)\cos\lambda x+B(\lambda)\sin\lambda x]d\lambda=g(x)\,,\ x\in\mathbb{R}\,. \tag{10}$$

Pe de altă parte, ținând seama de formula integrală a lui Fourier şi de formulele lui Euler, rezultă

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)e^{i\lambda(x-t)}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\cos\lambda(x-t)+i\sin\lambda(x-t)\right]d\lambda\right]g(t)dt\,.$$

Deoarece funcția $\lambda\mapsto\sin\lambda(x-t)$ este impară, rezultă că $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin\lambda(x-t)d\lambda=0$.

De asemenea, deoarece funcția $\lambda\mapsto\cos\lambda(x-t)$ este pară, rezultă că

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\lambda(x-t)d\lambda=2\int_0^{+\infty}\cos\lambda(x-t)d\lambda\,.$$

Aşadar, avem

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\left(\int_0^{+\infty}\cos\lambda(x-t)d\lambda\right)dt=$$

$$=\int_0^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\cos\lambda t\ dt\right)\cdot\cos\lambda x+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\sin\lambda t\ dt\right)\cdot\sin\lambda x\right]d\lambda\,. \tag{11}$$

Comparând formulele (10) şi (11), deducem că

$$A(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\cos\lambda t\ dt\,,\ B(\lambda)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\sin\lambda t\ dt\,.$$

Înlocuind aceste funcții în (9), se obține

$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\lambda y}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\cos\lambda(t-x)dt\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\left[\int_0^{\infty}e^{-\lambda y}\cos\lambda(t-x)d\lambda\right]dt\,.$$

Dar

$$\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}\cos\beta x\ dx=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}\,,\ \alpha>0\,,$$

deci

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda y} \cos \lambda(t-x) d\lambda = \frac{y}{y^2+(t-x)^2}.$$

În consecință, soluția problemei la limită (1), (2), este

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\frac{y\,dt}{y^2+(t-x)^2}. \tag{12}$$

Se poate arăta că, dacă funcția g este continuă şi mărginită pe $\mathbb{R}$, atunci, soluția problemei Dirichlet pentru semiplanul superior dată de (12) este unică în clasa funcțiilor mărginite.

Exemplul 5.4.2. Să se determine soluția problemei Dirichlet pentru semiplanul superior, ale cărei valori pe axa Ox sunt date de

$$u(x,0) = \frac{1}{x^2+1}.$$

Folosind formula (12), soluția problemei Dirichlet pentru semiplanul superior este, în acest caz:

$$u(x,y) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{y}{(t^2+1)[y^2+(t-x)^2]}dt. \tag{13}$$

Pentru calculul acestei integrale, descompunem integrandul în fracții simple:

$$\frac{y}{(t^2+1)[y^2+(t-x)^2]} = \frac{At+B}{t^2+1} + \frac{Ct+D}{y^2+(t-x)^2}, \tag{14}$$

unde

$$B = \frac{y(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2-1)^2+4x^2},\quad C = \frac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2+4x^2},$$

$$D = \frac{y(3x^2-y^2+1)}{(x^2+y^2-1)^2+4x^2}. \tag{15}$$

Funcția $t \mapsto \frac{t}{t^2+1}$, $t \in \mathbb{R}$, este impară, deci $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{t^2+1}dt = 0$. Atunci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{At+B}{t^2+1}dt = B \cdot arctgt\Big|_{-\infty}^{+\infty} = B \cdot \pi.$$

De asemenea, cu substituția $t = u + x$, obținem

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Ct+D}{y^2+(t-x)^2}dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Cu+Cx+D}{u^2+y^2}du = (Cx+D)\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{u^2+y^2} =$$

$$= \frac{Cx + D}{y} arctg \frac{u}{y} \bigg|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{Cx + D}{y} \cdot \pi \, .$$

Din (13) şi (14), rezultă

$$u(x, y) = B + \frac{Cx + D}{y} \, .$$

Ținând seama de (15), obținem

$$u(x,y)=\frac{y(x^2+y^2-1)}{(x^2+y^2-1)^2+4x^2}+\frac{x^2-y^2+1}{(x^2+y^2-1)^2+4x^2},$$

care după simplificare devine

$$u(x,y)=\frac{y+1}{x^2+(y+1)^2}.$$

5.5. Metode numerice pentru ecuații cu derivate parțiale. Metoda rețelelor

De regulă, găsirea soluțiilor exacte ale problemelor la limită pentru ecuații cu derivate parțiale nu este posibilă şi de aceea se folosesc metode numerice pentru aproximarea acestor soluții.

Înainte de a prezenta cea mai simplă metodă numerică de rezolvare a unei probleme la limită pentru o ecuație cu derivate parțiale, cunoscută sub numele de *metoda rețelelor* sau *metoda diferențelor finite*, vom face câteva considerații privind derivarea numerică.

Este cunoscut faptul că, cea mai utilizată metodă de aproximare a unei funcții este *polinomul de interpolare al lui Lagrange*.

Fie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ o funcție oarecare şi fie x_0, x_1, ..., x_n, $(n+1)$ *noduri* distincte din intervalul $[a,b]$. Există un polinom de gradul *n*, unic, care *interpolează* funcția *f* în nodurile x_i, $i=\overline{0,n}$, adică ia aceleaşi valori ca funcția *f* în nodurile x_i, $i=\overline{0,n}$.

Dacă notăm cu $P_n(x)=P_n(x;x_0,x_1,...,x_n)$ acest polinom, atunci avem $f(x_i)=P_n(x_i)$, $i=\overline{0,n}$.

Se verifică imediat că următorul polinom de gradul *n*, cunoscut ca polinomul de interpolare al lui Lagrange:

$$P_n(x)=\sum_{i=0}^{n}\frac{(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})...(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)...(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})...(x_i-x_n)}f(x_i),$$

are proprietatea că $P_n(x_i)=f(x_i)$, $\forall i=\overline{0,n}$.

Mai mult, dacă presupunem că ar mai exista un polinom $Q_n(x)$ cu proprietatea că $Q_n(x_i)=f(x_i)$, $\forall i=\overline{0,n}$, atunci polinomul $R(x)=P_n(x)-Q_n(x)$ s-ar anula în $(n+1)$ puncte distincte (nodurile x_0, x_1, ..., x_n).

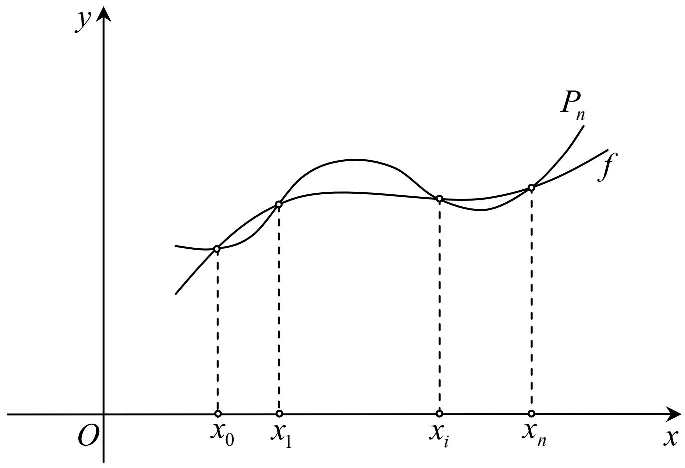


Fig. 1

Cum gradul polinomului R este mai mic sau egal cu n, rezultă că R este polinomul identic zero, $Q_n = P_n$. Aşadar, am arătat că polinomul Lagrange $P_n(x) = P_n(x; x_0, x_1, ..., x_n)$ este unic determinat.

Calea cea mai firească de abordare a derivării numerice este de a aproxima derivata funcției cu derivata polinomului Lagrange P_n, care interpolează funcția f în nodurile x_i, $i = \overline{0,n}$.

Dacă $n = 1$, atunci avem două noduri: x_0 şi $x_0 + h$, deci

$$P_1(x) = P_1(x; x_0, x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1),$$

$$P_1'(x) = \frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Prin urmare, aproximăm derivata

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{1}$$

Se poate arăta că eroarea este dată de relația

$$f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = -\frac{h}{2} f''(\xi_{x_0}), \text{ unde } \xi_{x_0} \in (x_0, x_1).$$

Dacă $n = 2$, atunci avem trei noduri: x_0, $x_0 + h$, $x_0 + 2h$, deci

$$P_2(x) = P_2(x; x_0, x_1, x_2) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) +$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2).$$

În continuare, avem:

$$P_2'(x_0)=\frac{2x_0-(x_1+x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{2x_0-(x_0+x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)+$$

$$+\frac{2x_0-(x_0+x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)=\frac{-3f(x_0)}{2h}+\frac{2f(x_1)}{h}-\frac{f(x_2)}{2h}=$$

$$=\frac{-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)}{2h}.$$

Aşadar, în cazul $n=2$, avem

$$f'(x_0)\approx\frac{-3f(x_0)+4f(x_0+h)-f(x_0+2h)}{2h}. \tag{2}$$

Eroare de aproximare a derivatei este

$$f'(x_0)-P_n'(x_0)=\frac{h^2}{3}f''(\xi_{x_0}),\text{ unde } \xi_{x_0}\in(x_0,x_2).$$

Pe de altă parte, în cazul $n=2$, putem aproxima şi derivata de ordinul al doilea şi obținem:

$$f''(x_0)\approx P_2''(x_0)=\frac{f(x_2)-2f(x_1)+f(x_0)}{h^2}, \tag{3}$$

iar eroarea este

$$f''(x_0)-P_2''(x_0)=-\frac{h^2}{12}f^{(IV)}(\xi_{x_0}),\ \xi_{x_0}\in(x_0,x_2).$$

Revenind la problema rezolvării numerice a unei probleme la limită pentru o ecuație cu derivate parțiale într-un domeniu $G\subset\mathbb{R}^2$, metoda rețelelor constă în următoarele: se consideră o rețea de drepte paralele cu axele de coordonate:

$$x=x_i=a+ih,\ i=\overline{1,m}$$

şi

$$y=y_j=b+jh,\ j=\overline{1,n},$$

care acoperă domeniul *G*. Punctele $M_{ij}(x_i,y_j)$ se numesc *nodurile rețelei*, iar *h* se numeşte *pasul rețelei*. Dacă se notează cu u_{ij} soluția problemei la limită în nodul M_{ij}, atunci, prin discretizarea ecuației cu derivate parțiale şi a condițiilor la limită în nodurile M_{ij}, se obține un

sistem de ecuații liniare în necunoscutele u_{ij}. Rezolvând acest sistem, obținem soluțiile aproximative ale problemei la limită, în nodurile rețelei.

Vom ilustra cele afirmate pe exemplele următoare.

a) Fie G un dreptunghi $ABCD$ cu laturile paralele cu axele de coordonate $AB=5$, $AD=4$. Se cere să se determine o funcție $u\in \mathscr{C}^{(2)}(G)\cap\mathscr{C}^{(1)}(\overline{G})$ care este soluția ecuației lui Poisson:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y),\ (x,y)\in G \tag{4}$$

şi verifică următoarele condiții la limită:

$$u\big|_{AB}=u\big|_{CD}=0, \tag{5}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{AD}=0, \tag{6}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}+u\right|_{BC}=0. \tag{7}$$

Interpretarea fizică este următoarea: o membrană elastică are marginile AB şi CD fixe, marginea AD liberă, iar marginea BC este rezemată elastic. Funcția căutată $u=u(x,y)$ reprezintă deplasarea membranei față de poziția de echilibru sub acțiunea unei încărcări continue $f=f(x,y)$, care este aplicată perpendicular pe membrană.

Considerăm o rețea pătratică formată din 18 noduri, de pas $h=1$, ca în figura de mai jos.

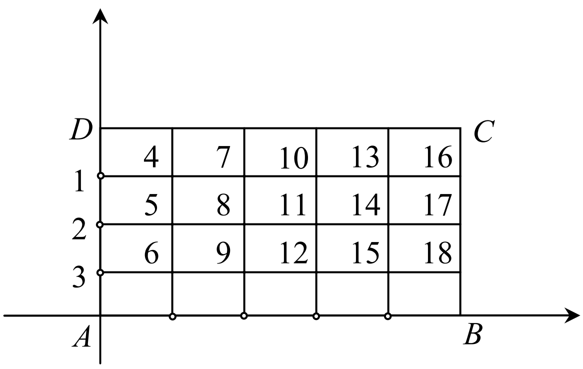


Fig. 2

Deoarece $u=0$ pe AB şi CD, nodurile de pe aceste laturi nu prezintă interes şi de aceea nu le-am mai considerat. Vom nota cu u_1, u_2, ..., u_{18} respectiv cu f_1, f_2, ..., f_{18} valorile funcției $u=u(x,y)$ respectiv ale funcției $f=f(x,y)$ în nodurile rețelei.

Pentru discretizarea ecuației (4), trebuie să aproximăm derivatele $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ şi $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ în nodurile rețelei. Ne propunem să arătăm cum se procedează pentru aceasta, analizând un nod interior, de exemplu nodul 11.

Conform (3), vom avea

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{11} = \frac{u_8 - 2u_{11} + u_{14}}{h^2}$$

şi

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{11} = \frac{u_{10} - 2u_{11} + u_{12}}{h^2}.$$

Înlocuind în ecuația (4), obținem:

$$\frac{u_8 - 2u_{11} + u_{14} + u_{10} - 2u_{11} + u_{12}}{h^2} = f_{11}$$

şi mai departe

$$4u_{11} - u_8 - u_{14} - u_{10} - u_{12} + h^2 f_{11} = 0. \tag{9}$$

În fiecare din cele 12 noduri interioare vom obține câte o ecuație de tipul (9). Modul de alcătuire al ecuației (9) se numeşte *de tip cruce* şi este pus în evidență de figura 3.

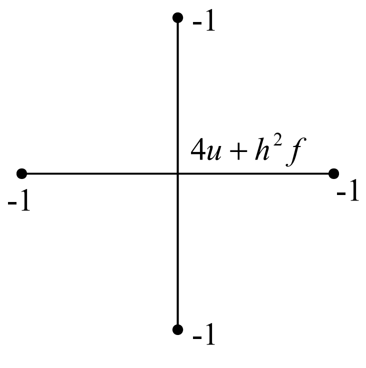


Fig. 1

În cazul nodului 4, care este un nod interior, ecuația corespunzătoare va fi

$$4u_4 - u_5 - u_7 - u_4 + h^2 f_4 = 0, \tag{10}$$

deoarece $u\big|_{CD} = 0$.

Aşadar, celor 12 noduri interioare le corespund 12 ecuații liniare de tipul (9) sau (10), în necunoscutele u_1, u_2, ..., u_{18}.

Pentru a discretiza condițiile la limită de pe laturile *AD* şi *BC*, trebuie să aproximăm derivata $\frac{\partial u}{\partial x}$. Pentrua avea o diversitate a procedeelor de discretizare, vom folosi pentru aproximarea derivatei $\frac{\partial u}{\partial x}$ formula (2). De exemplu, în nodul 1 vom avea

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{-3u_1 + 4u_4 - u_7}{2h}.$$

Cum $\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{AC} = 0$, obținem ecuația liniară

$$-3u_1 + 4u_4 - u_7 = 0. \tag{11}$$

Ecuații asemănătoare se obțin pentru nodurile 2 şi 3.

Deoarece pe latura *BC* condiția la limită este $\frac{\partial u}{\partial x} + u = 0$, în nodul 16 obținem

$$\frac{-3u_{16} + 4u_{13} - u_{10}}{2h} + u_{16} = 0$$

şi mai departe

$$-3u_{16} + 4u_{13} - u_{10} + 2hu_{16} = 0. \tag{12}$$

Ecuații asemănătoare se obțin pentru nodurile 17 şi 18.

În final, se obține un sistem de 18 ecuații liniare cu 18 necunoscute: u_1, u_2, ..., u_{18}.

Rezolvând acest sistem se obțin valorile aproximative ale funcției u în nodurile rețelei.

b) Vom aplica metoda diferențelor finite în cazul ecuației propagării căldurii într-o bară omogenă mărginită. Se cere să se determine funcția $u(x,t)$, care este soluție a ecuației propagării căldurii

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ (x,t) \in [0,5]\times[0,4], \tag{13}$$

şi satisface condiția inițială

$$u(x,0) = x(5-x) \tag{14}$$

şi condițiile la limită

$$u(0,t) = 0,\ u(5,t) = 0. \tag{15}$$

Divizăm intervalul $[0,5]$ în 5 părți egale, prin punctele $x_n = nh$, $n = \overline{0,5}$, $h = 1$; apoi divizăm segmentul $[0,4]$ în 4 părți egale, prin punctele $t_m = mk$, $m = \overline{0,4}$, $k = 1$. Precizăm că, în general, nu este obligatoriu ca $h = k$. Se obține o rețea similară celei din figura 2.

Notăm $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$, $i = \overline{0,5}$, $j = \overline{0,4}$.

Pentru aproximarea derivatei parțiale $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ folosim formula (1), iar pentru aproximarea derivatei parțiale $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ folosim formula (3), deci

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k},$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}.$$

În consecință, ținând seama de (13), rezultă

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2},\ i = \overline{1,4},\ j = \overline{1,3}. \tag{16}$$

Din condițiile la limită (15) avem $u_{0,j} = u_{5,j} = 0$, $j = \overline{0,4}$, iar din condiția inițială (14) $u_{i,0} = x_i(5 - x_i)$, $i = \overline{1,4}$.

Cunoscând aceste valori şi luând $j = 0$ în (16), se calculează valorile $u_{i,1}$, $i = \overline{1,4}$, deci valorile în nodurile aflate pe dreapta $t = k$. Apoi, considerând $j = 1$ în (16), se calculează valorile $u_{i,2}$, $i = \overline{1,4}$, adică valorile în nodurile aflate pe dreapta $t = 2k$ etc.

CAPITOLUL 6

ELEMENTE DE CALCUL VARIAȚIONAL

6.1. Introducere

Calculul variațional se ocupă cu studiul extremelor pentru o clasă specială de funcții numite *funcționale*. Aceste funcționale sunt definite pe submulțimi ale unor spații de funcții obişnuite. Din punct de vedere istoric, contribuții decisive la dezvoltarea calculului variațional au adus Euler (1744), dar mai ales Lagrange (1760) care a dat metodele generale ale disciplinei şi le-a aplicat în mecanică. Vom începe cu prezentarea unor probleme clasice ale calculului variațional.

Curba de cea mai rapidă coborâre (problema brachistocronei). Problema a fost formulată de Johann Bernoulli în 1696. De rezolvarea acestei probleme s-au ocupat frații Johann şi Jacob Bernoulli, Newton, Leibniz, l'Hospital. Originea termenului *brachistocronă* se află în limba greacă (brakhistos = cel mai scurt, khronos = timp). Prin brachistocronă se înțelege traiectoria pe care un corp care se deplasează între două puncte date, sub acțiunea gravitației, realizează cel mai scurt timp. Aşadar, dintre toate curbele aflate într-un plan vertical şi trecând prin punctele fixe $O(0,0)$ şi $P(a,b)$, cu P mai jos decât O, să se determine acea curbă pentru care timpul de coborâre din O în P a unui punct material greu fără frecare, să fie minim. Pentru rezolvare, vom orienta axa Oy pe verticală în jos ca în fig. 1.

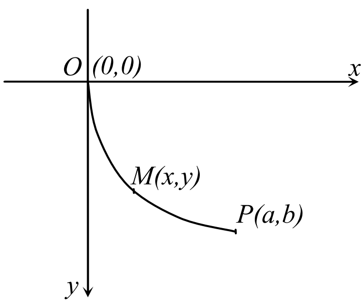


Fig. 1

Fie $y = y(x)$, $x \in [0, a]$, $y(0) = 0$, $y(a) = b$, $a, b > 0$, curba căutată. Fie v viteza de deplasare a punctului material, deci $v = \sqrt{2g\, y} = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, unde $\mathrm{d}s$ este lungimea arcului OM.

Atunci $\mathrm{d}t = \dfrac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g\,y}}$.

Prin urmare, dacă T este timpul necesar pentru ca punctul material să ajungă în punctul P, vom avea

$$T = \int_{\overset{\frown}{OP}} \frac{\mathrm{d}s}{\sqrt{2g\,y}} = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{2g\,y(x)}}\,\mathrm{d}x .$$

Problema suprafeţei de rotaţie de arie minimă constă în determinarea unei curbe $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, $y(a) = c$, $y(b) = d$, cu proprietatea că aria suprafeţei de rotaţie a graficului în jurul axei Ox este minimă (fig. 2). După cum se cunoaşte, expresia acestei arii este

$$A = 2\pi \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x .$$

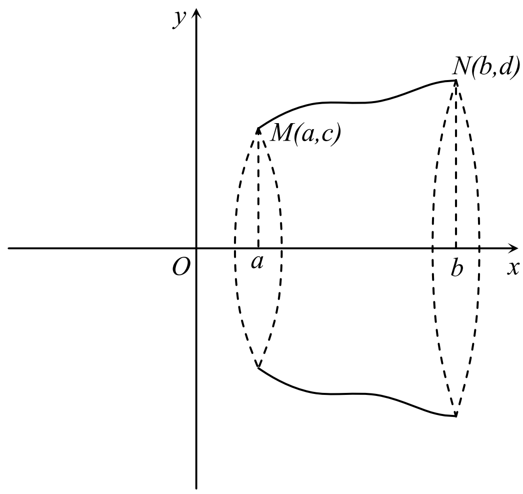


Fig. 2

Echilibrul unei membrane deformate.

O membrană elastică în stare de repaus are forma domeniului $D \subset xOy$ (fig. 3). Fie C frontiera lui D. Deformăm conturul C al membranei în direcţia perpendiculară pe planul xOy şi notăm cu $u(x,y)$ deplasarea (deformaţia) unui punct oarecare $M(x,y) \in D$ (deformarea conturului atrage după sine şi deplasarea punctelor din interiorul membranei).

Se cere să se determine poziţia de echilibru a membranei când cunoaştem deformarea conturului ei.

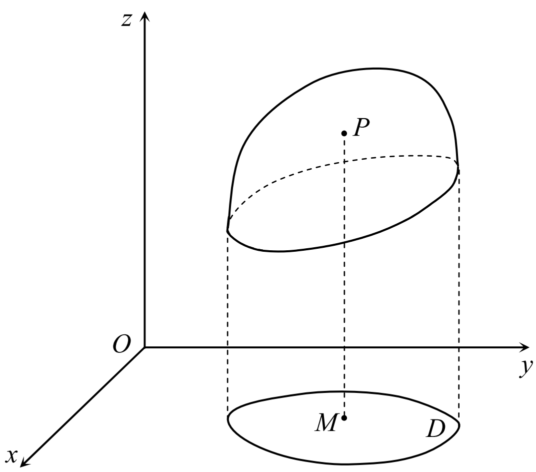


Fig. 3

Aria membranei deformate va fi

$$\iint_D \sqrt{1+u_x^2+u_y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

Dacă deplasările sunt mici,

aproximăm această arie cu

$$\iint_D \left(1+\frac{1}{2}(u_x^2+u_y^2)\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Rezultă că variația ariei suprafeței deformate este

$$\frac{1}{2}\iint_D (u_x^2+u_y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

Se admite că energia potențială a membranei deformate este proporțională cu creșterea ariei sale. Prin urmare energia potențială de deformație E este

$$E=\frac{\mu}{2}\iint_D (u_x^2+u_y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,, \tag{1}$$

unde μ este o constantă care exprimă calitățile elastice ale membranei. Presupunem că se cunosc deplasările punctelor de pe contur, deci că

$$u\big|_C=\varphi(x,y)\,, \tag{2}$$

φ fiind o funcție cunoscută.

Poziția de echilibru se realizează când energia potențială este minimă. Se obține astfel următoarea problemă variațională. Dintre toate funcțiile $u\in\mathscr{C}^{(1)}(D)$ care satisfac condiția (2), să se determine acea funcție pentru care integrala (1) devine minimă.

6.2. Extreme ale funcționalelor. Variația întâi a unei funcționale Teorema lui Fermat

Pentru început, reamintim câteva noțiuni învățate la cursul de Analiză matematică.

Fie X un spațiu vectorial real.

Definiția 6.2.1. Se numește *normă* pe X o funcție $\|\cdot\|: X\to\mathbb{R}_+$, cu proprietățile:

1) $\|x\|=0 \Leftrightarrow x=0_X$;

2) $\|\lambda x\|=|\lambda|\|x\|$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall x\in X$;

3) $\|x+y\|\le\|x\|+\|y\|$, $\forall x,y\in X$. *(inegalitatea triunghiului)*

Spațiul vectorial X înzestrat cu o normă se numește *spațiu vectorial normat*.

Exemplul 6.2.1. Fie $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, $I=[a,b]$ un interval şi $n\in\mathbb{N}^*$. Spațiul vectorial real $\mathscr{C}^{(n)}(I;\mathbb{R})$ al funcțiilor $y:I\to\mathbb{R}$ de clasă $\mathscr{C}^{(n)}$, înzestrat cu norma

$$\|y\|=\sup_{x\in I}|y(x)|+\sup_{x\in I}|y'(x)|+...+\sup_{x\in I}\left|y^{(n)}(x)\right|, \tag{1}$$

este un spațiu vectorial normat. De asemenea, spațiul vectorial real $\mathscr{C}^{(1)}(I;\mathbb{R}^2)$ al funcțiilor $\gamma:I\to\mathbb{R}^2$, $\gamma(x)=\big((y(x),z(x)\big)$, unde $y,z\in\mathscr{C}^{(1)}(I;\mathbb{R})$, înzestrat cu norma

$$\|\gamma\|=\sup_{x\in I}\sqrt{y^2(x)+z^2(x)}+\sup_{x\in I}\sqrt{y'^2(x)+z'^2(x)}\,, \tag{2}$$

este un spațiu vectorial normat.

Exemplul 6.2.2. Fie $D\subset\mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit de o curbă închisă, netedă pe porțiuni. Spațiul $\mathscr{C}^{(1)}(\bar{D};\mathbb{R})$ este spațiu vectorial normat în raport cu norma

$$\|z\|=\sup_{(x,y)\in\bar{D}}|z(x,y)|+\sup_{(x,y)\in\bar{D}}\left|\frac{\partial z}{\partial x}(x,y)\right|+\sup_{(x,y)\in\bar{D}}\left|\frac{\partial z}{\partial y}(x,y)\right|,\ \forall z\in\mathscr{C}^{(1)}(\bar{D};\mathbb{R}). \tag{3}$$

Definiția 6.2.2. Fie X un spațiu vectorial normat, $y_0\in X$ şi $r>0$. Se numeşte *bila deschisă cu centrul în z_0 şi de rază r* mulțimea $B(y_0,r)=\{y\in X;\ \|y-y_0\|<r\}$. Mulțimea $A\subset X$ se numeşte *deschisă* dacă $\forall y\in A$, există $r>0$ astfel încât $B(y,r)\subset A$.

Definiția 6.2.3. Fie $(y_n)_n\subset X$. Şirul $(y_n)_n$ *converge* la $y\in X$ şi se notează $y_n\to y$ dacă şi numai dacă $\lim\limits_{n\to\infty}\|y_n-y\|=0$. Şirul $(y_n)_n$ se numeşte *şir fundamental* sau *şir Cauchy* dacă şi numai dacă $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|y_m-y_n\|=0$. Un spațiu vectorial normat, în care orice şir Cauchy este convergent se numeşte *spațiu complet* sau *spațiu Banach.*

Observația 6.2.1. Reamintim că pe spațiul $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$, al funcțiilor continue pe $[a,b]$, se poate defini norma Cebâşev:

$$\|g\|_C=\sup\{|g(x)|;x\in[a,b]\}\ ,\ \forall g\in\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R}).$$

Mai mult, spațiul $\mathscr{C}([a,b];\mathbb{R})$ înzestrat cu norma Cebâşev este un spațiu Banach.

Rezultatul se extinde şi pentru spațiul funcțiilor continue pe o mulțime compactă $K \subset \mathbb{R}^n$ cu valori în $\mathbb{R}^m$. Cu aceste precizări, norma (1) se mai scrie:

$$\|y\| = \|y\|_C + \|y'\|_C + \ldots + \|y^{(n)}\|_C .$$

De asemenea, normele (2) şi (3) devin

$$\|\gamma\| = \|\gamma\|_C + \|\gamma'\|_C$$

respectiv

$$\|z\| = \|z\|_C + \left\|\frac{\partial z}{\partial x}\right\|_C + \left\|\frac{\partial z}{\partial y}\right\|_C .$$

Este uşor de observat că spațiile vectoriale normate din exemplele 1) şi 2) sunt spații Banach.

Fie X un spațiu vectorial normat. În cele ce urmează, prin *funcțională* pe X înțelegem orice funcție $\mathscr{F} : X \to \mathbb{R}$.

Problemele clasice ale calculului variațional prezentate secțiunea 6.1, ne sugerează să considerăm următoarele funcționale.

Exemplul 6.2.3. Fie $X = \mathscr{C}^{(1)}([0,a];\mathbb{R})$. În cazul problemei brachistocronei, definim pe X *funcționala-timp* $\mathscr{T} : X \to \mathbb{R}$,

$$\mathscr{T}(y) = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}\mathrm{d}x,\ \forall y \in X .$$

De asemenea, în cazul problemei suprafeței de rotație de arie minimă, pe $X = \mathscr{C}^{(1)}([a,b];\mathbb{R})$ putem defini *funcționala-arie* $\mathscr{A} : X \to \mathbb{R}$,

$$\mathscr{A}(y) = \int_a^b y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\mathrm{d}x,\ \forall y \in X .$$

Mai general, pe $X = \mathscr{C}^{(1)}([a,b];\mathbb{R})$ putem considera funcționale de tipul

$$\mathscr{F}(y) = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))\mathrm{d}x,$$

unde F este o funcție continuă pe un domeniu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, iar y este o funcție oarecare de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ pe $[a,b]$, cu proprietatea că $(x, y(x), y'(x)) \in \Omega$, $\forall x \in [a,b]$.

Exemplul 6.2.4. Problema echilibrului unei membrane deformate care ocupă domeniul mărginit $D \subset \mathbb{R}^2$, ne conduce la considerarea *funcționalei-energie*

$$\mathscr{E}(u) = \iint_D (u_x^2 + u_y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

cunoscută sub numele de *integrala energiei* sau *integrala Dirichlet* a funcției $u : D \to \mathbb{R}$.

Mai general, pe $X = \mathscr{C}^{(1)}(D;\mathbb{R})$ putem considera funcționale de tipul

$$\mathscr{F}(z) = \int_a^b F(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}(x, y), \frac{\partial z}{\partial y}(x, y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

unde F este o funcție continuă de cinci variabile reale, definită pe mulțimea $\{(x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}(x, y), \frac{\partial z}{\partial y}(x, y)) \in \mathbb{R}^5; (x, y) \in D\}$, z fiind o funcție de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ pe domeniul D.

Definiția 6.2.4. Fie X un spațiu vectorial normat, $A \subset X$ și $\mathscr{F} : A \to \mathbb{R}$ o funcțională. Un element $y_0 \in A$ se numește punct de *minim local* (respectiv *maxim local*) pentru $\mathscr{F}$, dacă există $r > 0$ astfel încât pentru orice $y \in A$ care satisface $\|y - y_0\| < r$, rezultă $\mathscr{F}(y) \geq \mathscr{F}(y_0)$ (respectiv $\mathscr{F}(y) \leq \mathscr{F}(y_0)$). Un punct de minim local sau de maxim local se numește punct de *extrem local*. Dacă inegalitățile de mai sus au loc pentru orice $y \in A$, atunci se poate vorbi de punct de *minim global* (respectiv *maxim global*) sau *extrem global*.

În continuare, fie X un spațiu vectorial normat, $A \subset X$ o mulțime deschisă, $\mathscr{F} : A \to \mathbb{R}$ o funcțională, $y_0 \in A$ și $h \in X$, $h \neq 0_X$, un element fixat. Mulțimea A fiind deschisă, există $r > 0$ astfel încât $B(y_0, r) \subset A$. Dacă $t \in \mathbb{R}$, atunci elementul $y = y_0 + th \in B(y_0, r)$ dacă și numai dacă $\|y - y_0\| < r$, deci dacă și numai dacă $|t| < \frac{r}{\|h\|}$. În consecință, putem defini funcția reală

$$\varphi_h : \left(-\frac{r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|}\right) \to \mathbb{R},\ \varphi_h(t) = \mathscr{F}(y_0 + th). \tag{4}$$

Definiția 6.2.5. Fie X un spațiu vectorial normat, $A \subset X$ o mulțime deschisă, $\mathscr{F} : A \to \mathbb{R}$ şi $y_0 \in A$. Se spune că $\mathscr{F}$ *admite variația întâi în* y_0 *pe direcția unui vector nenul* $h \in X$, dacă funcția φ_h dată de (4) este derivabilă în punctul $t = 0$. În acest caz, $\varphi_h'(0)$ se numeşte *variația întâi a lui* $\mathscr{F}$ *în* y_0 *pe direcția lui* h şi se notează cu $\delta_h \mathscr{F}(y_0)$.

Vectorul h se numeşte *variație* a argumentului funcționalei $\mathscr{F}$. Un punct $y_0 \in A$ cu proprietatea că $\delta_h \mathscr{F}(y_0) = 0$, $\forall h \in X$, se numeşte punct *critic* (*staționar*) al funcționalei $\mathscr{F}$.

Prin urmare

$$\delta_h \mathscr{F}(y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{\varphi_h(t) - \varphi_h(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\mathscr{F}(y_0 + th) - \mathscr{F}(y_0)}{t}. \tag{5}$$

Dacă $h = 0$, atunci punem $\delta_h \mathscr{F}(y_0) = 0$.

Observația 6.2.2. În particular, fie $X = \mathbb{R}^n$, $h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$ şi $s = \dfrac{h}{\|h\|}$ versorul lui h.

Atunci

$$\delta_h \mathscr{F}(y_0) = \frac{\mathrm{d}\mathscr{F}}{\mathrm{d}s}(y_0),$$

unde $\dfrac{\mathrm{d}\mathscr{F}}{\mathrm{d}s}(y_0)$ este derivata lui $\mathscr{F}$ după direcția lui s în y_0. Aşadar, noțiunea de variație întâi este o extindere a conceptului de derivată după o direcție.

Ca şi în cazul funcțiilor reale următoarea teoremă furnizează o condiție necesară de extrem.

Teorema 6.2.1. (Teorema lui Fermat). *Fie* X *un spațiu vectorial normat,* $A \subset X$ *o mulțime deschisă şi* $\mathscr{F} : A \to \mathbb{R}$ *o funcțională. Dacă* $y_0 \in A$ *este un punct de extrem local pentru* $\mathscr{F}$ *şi dacă* $\mathscr{F}$ *admite variația întâi în* y_0 *pe orice direcție, atunci* y_0 *este punct critic al lui* $\mathscr{F}$*, adică*

$$\delta_h \mathscr{F}(y_0) = 0, \ \forall h \in X. \tag{6}$$

Demonstrație. Egalitatea (6) este evidentă pentru $h = 0_X$. Să presupunem acum că $h \neq 0_X$ şi că y_0 este punct de minim local, în cazul în care y_0 este punct de maxim local raționamentul fiind similar. Conform definiției, există $r > 0$ astfel încât pentru orice $y \in A \cap B(y_0, r)$ are loc $\mathscr{F}(y) \geq \mathscr{F}(y_0)$. Mulțimea A fiind deschisă, putem alege $r > 0$ suficient de mic astfel încât $B(y_0, r) \subset A$. Aşadar, pentru orice $y \in B(y_0, r)$ avem $\mathscr{F}(y) \geq \mathscr{F}(y_0)$. Deoarece pentru $|t| < \dfrac{r}{\|h\|}$, $y = y_0 + th \in B(y_0, r)$, rezultă că pentru orice $t \in \left(-\dfrac{r}{\|h\|}, \dfrac{r}{\|h\|} \right)$ are loc inegalitatea $\mathscr{F}(y_0 + th) \geq \mathscr{F}(y_0)$ care, ținând seama de (4), se mai poate scrie sub forma $\varphi_h(t) \geq \varphi_h(0)$, $\forall t \in \left(-\dfrac{r}{\|h\|}, \dfrac{r}{\|h\|} \right)$. Conform teoremei clasice a lui Fermat pentru funcții de o variabilă reală, rezultă că $\varphi_h'(0) = 0$ sau, echivalent, $\delta_h \mathscr{F}(y_0) = 0$. ■

În cele ce urmează, vom aborda problema determinării punctelor critice (staționare) pentru funcționale concrete.

6.3. Funcționale de tipul $\mathscr{F}(y) = \int_a^b F(x, y, y')\mathrm{d}x$

Fie $D \subset \mathbb{R}^3$ o mulțime deschisă, $F : D \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ şi $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$. De asemenea, fie

$$\mathscr{D} = \{ y \in \mathscr{C}^{(1)}(I; \mathbb{R}) \,\big|\, \big(x, y(x), y'(x)\big) \in D, \ \forall x \in I \},$$

Considerăm funcționala $\mathscr{F} : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$,

$$\mathscr{F}(y) = \int_a^b F(x, y, y')\mathrm{d}x, \ \forall y \in \mathscr{D}. \tag{1}$$

Această funcțională depinde de F.

Lema 6.3.1. *Mulțimea $\mathscr{D}$ este deschisă în spațiul Banach $\mathscr{C}^{(1)}(I; \mathbb{R})$.*

Demonstrație. Fie $y_0 \in \mathscr{D}$ oarecare. Cum funcția vectorială

$$x \to (x, y_0(x), y_0'(x)) : I \to D \subset \mathbb{R}^3$$

este continuă, rezultă că mulțimea $K = \{(x, y_0(x), y_0'(x)); x \in I\} \subset D$ este compactă. Fie $r = d(x, \complement D) = \inf\{d(M, N); M \in K, N \in \complement D\}$. Deoarece $K \cap \complement D = \varnothing$, K este compactă şi $\complement D$ este închisă, rezultă că $r > 0$ (vezi [8], Teorema 5.2.1, pag. 100). Vom arăta că $B(y_0; \frac{r}{2}) \subset \mathscr{D}$, de unde va rezulta că $\mathscr{D}$ este o mulțime deschisă. Fie $y \in B(y_0; \frac{r}{2})$. Atunci

$$\|y - y_0\| = \sup_{x \in I} |y(x) - y_0(x)| + \sup_{x \in I} |y'(x) - y_0'(x)| < \frac{r}{2}.$$

În particular, avem

$$|y(x) - y_0(x)| + |y'(x) - y_0'(x)| < \frac{r}{2}, \ \forall x \in I. \tag{2}$$

Fie $x \in I$ oarecare fixat, $M(x, y_0(x), y_0'(x)) \in K$ şi $P(x, y(x), y'(x))$. Avem

$$d(M, P) = \sqrt{(y(x) - y_0(x))^2 + (y'(x) - y_0'(x))^2} \le |y(x) - y_0(x)| + |y'(x) - y_0'(x)| < \frac{r}{2}.$$

Cum $d(P, K) \le d(P, M)$, rezultă că $d(P, K) < \frac{r}{2}$. Din această ultimă inegalitate deducem că $P \in D$, pentru că, în caz contrar, $P \in \complement D$ şi $d(P, K) \ge d(\complement D, K) = r$, ceea ce este absurd.

În definitiv, am arătat că dacă $y \in B(y_0; \frac{r}{2})$, atunci $(x, y(x), y'(x)) \in D$, $\forall x \in I$, deci $y \in \mathscr{D}$. Cu aceasta, lema este demonstrată. ■

Ne punem problema determinării funcțiilor din $\mathscr{D}$ care realizează un extrem al funcționalei (1) pe această mulțime. Conform teoremei lui Fermat, dacă $y_0 \in \mathscr{D}$ realizează un extrem al funcționalei (1) pe $\mathscr{D}$, atunci, în mod necesar

$$\delta_h \mathscr{F}(y_0) = 0, \ \forall h \in \mathscr{C}^{(1)}(I; \mathbb{R}).$$

În practică se pune problema determinării punctelor de extrem ale funcționalei (1) *cu capete fixe*. În acest caz, fie $c, d \in \mathbb{R}$ numere date şi

$$\mathscr{A} = \{y \in \mathscr{D} \mid y(a) = c, \ y(b) = d\},$$

cunoscută sub numele de *mulțimea funcțiilor admisibile* ale problemei. Este uşor de constatat că, dacă se cunoaşte o funcție $y_0 \in \mathscr{A}$, atunci orice altă funcție $y \in \mathscr{A}$ este de forma $y = y_0 + h$, unde $h(a) = h(b) = 0$. Prin urmare, dacă $y_0 \in \mathscr{A}$ realizează un extrem al funcționalei (1) pe mulțimea funcțiilor admisibile, atunci, în mod necesar

$$\delta_h \mathscr{F}(y_0) = 0, \ \forall h \in \mathscr{C}^{(1)}(I;\mathbb{R}), \ h(a) = h(b) = 0.$$

Pentru rezolvarea problemelor de extrem pentru funcționala (1) este util următorul rezultat.

Lema 6.3.2. (Lema fundamentală a calculului variațional). (Lagrange). *Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că pentru orice funcție $h:[a,b] \to \mathbb{R}$, de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ pe $[a,b]$, cu $h(a) = h(b) = 0$, satisface condiția*

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = 0. \qquad (3)$$

Atunci $f(x) = 0$, pentru orice $x \in [a,b]$.

Demonstrație. Funcția f fiind continuă, este suficient să arătăm că $f(x) = 0$, pentru orice $x \in (a,b)$. Presupunem, prin absurd, că f nu este identic nulă pe (a,b), deci există $c \in (a,b)$ astfel încât $f(c) \neq 0$. Fără micşorarea generalității, putem presupune că $f(c) > 0$. Funcția f fiind continuă în punctul c, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ suficient de mic, astfel încât $J = [c-\delta, c+\delta] \subset (a,b)$ şi pentru orice $x \in J$, avem $|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$. Altfel spus, pentru orice $x \in J$ au loc inegalitățile $f(c) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(c) + \varepsilon$. În particular, pentru $\varepsilon = \frac{1}{2} f(c)$ rezultă că există un interval corespunzător $J = [c-\delta, c+\delta]$ astfel încât pentru orice $x \in J$ avem $f(x) \geq \frac{1}{2} f(c)$. Fie funcția

$$h(x) = \begin{cases} (x-c+\delta)^2 (x-c-\delta)^2, & \text{dacă } x \in J \\ 0, & \text{dacă } x \notin J \end{cases}.$$

Se verifică uşor că funcția h satisface condițiile din enunțul lemei. În plus, folosind teorema de medie, rezultă că

$$\int_a^b f(x)h(x)\mathrm{d}x = \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)h(x)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2} f(c) \int_{c-\delta}^{c+\delta} h(x)\mathrm{d}x = f(c)h(\xi)\delta > 0,$$

unde $\xi \in (c-\delta, c+\delta)$, ceea ce contrazice (3). ■

Observația 6.3.1. Lema lui Lagrange rămâne valabilă dacă funcția h din enunțul lemei este o funcție de clasă $\mathscr{C}^{(k)}$, $k \geq 1$, pe $[a,b]$, care se anulează în a și b împreună cu derivatele sale până la ordinul $k-1$ inclusiv. Este suficient să luăm $h(x) = (x-c+\delta)^{2k}(x-c-\delta)^{2k}$, dacă $x \in J$.

Lema 6.3.3. (Du-Bois-Raymond). *Fie $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că pentru orice funcție $h:[a,b] \to \mathbb{R}$, de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ pe $[a,b]$, cu $h(a) = h(b) = 0$, satisface condiția*

$$\int_a^b f(x)h'(x)\mathrm{d}x = 0. \tag{4}$$

Atunci funcția f este constantă pe intervalul $[a,b]$.

Demonstrație. Fie

$$h:[a,b] \to \mathbb{R},\ h(x) = \int_a^x (f(t)-c)\mathrm{d}t,$$

unde c este o constantă care se determină din condiția $h(b) = 0$, deci

$$c = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

Este clar că funcția h astfel construită este de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ pe $[a,b]$, satisface condițiile $h(a) = h(b) = 0$ și $h'(x) = f(x) - c$. Atunci

$$\int_a^b \big(f(x)-c\big)^2 \mathrm{d}x = \int_a^b \big(f(x)-c\big)h'(x)\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b f(x)h'(x)\mathrm{d}x - c\int_a^b h'(x)\mathrm{d}x = 0 - c[h(b)-h(a)] = 0.$$

Integrantul fiind pozitiv și funcția f continuă, rezultă că $f(x) = c$, $\forall x \in [a,b]$. ■

Corolarul 6.3.1. *Dacă* $P,Q:[a,b]\to\mathbb{R}$ *sunt funcţii continue care satisfac*

$$\int_a^b [P(x)h(x)+Q(x)h'(x)]\mathrm{d}x=0$$

pentru orice funcţie h *de clasă* $\mathscr{C}^{(1)}$ *pe* $[a,b]$*, cu* $h(a)=h(b)=0$*, atunci funcţia* Q *este derivabilă şi* $Q'(x)=P(x)$*,* $\forall x\in[a,b]$.

Demonstraţie. Fie funcţia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\int_a^x P(t)\mathrm{d}t$. Această funcţie este derivabilă şi $f'(x)=P(x)$, $\forall x\in[a,b]$. Conform ipotezei, pentru orice funcţie h de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ pe $[a,b]$, cu $h(a)=h(b)=0$, avem

$$\int_a^b [f'(x)h(x)+Q(x)h'(x)]\mathrm{d}x=0,$$

de unde, integrând prin părţi, obţinem

$$\int_a^b Q(x)h'(x)\mathrm{d}x=-\int_a^b f'(x)h(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)h'(x)\mathrm{d}x.$$

În consecinţă

$$\int_a^b [Q(x)-f(x)]h'(x)\mathrm{d}x=0.$$

Conform Lemei 6.3.3, rezultă că funcţia $Q-f$ este constantă pe $[a,b]$, deci $Q'(x)=f'(x)=P(x)$, $\forall x\in[a,b]$. ■

Teorema 6.3.1. (Teorema lui Euler). *Fie* $D\subset\mathbb{R}^3$ *o mulţime deschisă,* $F:D\to\mathbb{R}$ *o funcţie de clasă* $\mathscr{C}^{(1)}$ *,* $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$ *şi* $\mathscr{D}=\{y\in\mathscr{C}^{(1)}(I;\mathbb{R})\,\big|\,\big(x,y(x),y'(x)\big)\in D,\ \forall x\in I\}$.

Fie, de asemenea, funcţionala $\mathscr{F}:\mathscr{D}\to\mathbb{R}$*,*

$$\mathscr{F}(y)=\int_a^b F(x,y,y')\mathrm{d}x,\ \forall y\in\mathscr{D}.$$

Dacă funcţia $y_0\in\mathscr{A}=\{y\in\mathscr{D}\ \big|\ y(a)=c,\ y(b)=d\}$ *realizează un extrem al funcţionalei* $\mathscr{F}$ *pe mulţimea funcţiilor admisibile* $\mathscr{A}$*, atunci funcţia*

$x \mapsto \frac{\partial F}{\partial y'}(x, y_0(x), y_0'(x))$ *este de clasă* $\mathscr{C}^{(1)}$ *pe* $[a,b]$ *şi funcția* y_0 *verifică ecuația diferențială*

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right). \tag{5}$$

Demonstrație. Fie h o funcție de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ pe $[a,b]$, care satisface condițiile la limită $h(a)=0$, $h(b)=0$ şi funcția $\varphi_h : \left(-\frac{r}{\|h\|}, \frac{r}{\|h\|}\right) \to \mathbb{R}$, $\varphi_h(t) = \mathscr{F}(y_0 + th)$. Variația întâi a funcționalei $\mathscr{F}$ este $\delta_h \mathscr{F}(y_0) = \varphi_h'(0)$, deci

$$\delta_h \mathscr{F}(y_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_a^b F\left(x, y_0(x) + th(x), y_0'(x) + th'(x)\right)\mathrm{d}x\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F\left(x, y_0(x) + th(x), y_0'(x) + th'(x)\right)\right)\Bigg|_{t=0}\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)\cdot h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)\cdot h'(x)\right]\mathrm{d}x.$$

Conform teoremei lui Fermat, $\delta_h \mathscr{F}(y_0) = 0$, pentru orice funcție h de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ pe $[a,b]$, care satisface $h(a)=0$, $h(b)=0$, deci

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)\cdot h(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\left(x, y_0(x), y_0'(x)\right)\cdot h'(x)\right]\mathrm{d}x = 0.$$

Concluzia teoremei rezultă din Corolarul 6.3.1. ■

Aşadar, teorema lui Euler ne dă o condiție necesară de extrem, cu care problema poate fi complet rezolvată în multe cazuri. Problema condițiilor suficiente de extrem depăşeşte cadrul acestui curs şi nu o vom aborda.

Ecuația diferențială (5) se numeşte *ecuația lui Euler-Lagrange* asociată funcționalei $\mathscr{F}$. Soluțiile ecuației diferențiale (5) se numesc *extremale*. Ele sunt susceptibile de a fi puncte de minim pentru funcționala $\mathscr{F}$.

Observația 6.3.2. Dacă funcția $F \in \mathscr{C}^{(2)}(D)$, derivând în raport cu x termenul drept al ecuației (4), aceasta devine

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2} y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial y'} y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0 .$$

Rezultă că, dacă $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}$ nu este identic nulă, atunci ecuația diferențială (4) este o ecuație diferențială de ordinul al doilea, deci soluția sa generală depinde de două constante arbitrare.

Aceste constante se determină folosind condiția suplimentară a problemei: curba căutată trebuie să treacă prin două puncte date.

Exemplul 6.3.1. Să se determine extremalele funcționalei

$$\mathscr{F}(y) = \int_1^2 (x^2 y'^2 + 12 y^2) \mathrm{d}x ,$$

care satisfac condițiile la limită $y(1) = 1$, $y(2) = 8$.

În acest caz $F(x, y, y') = x^2 y'^2 + 12 y^2$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 24 y$, $\frac{\partial F}{\partial y'} = 2x^2 y'$.

În consecință, ecuația Euler-Lagrange va fi

$$24y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2x^2 y') = 0 \text{ sau } 24y - 4xy' - 2x^2 y'' = 0 .$$

Se ajunge astfel la ecuația diferențială de tip Euler

$$x^2 y'' + 2xy' - 12y = 0 .$$

Facem schimbarea de variabilă $x = e^t$ şi ținem seama că $y' = e^{-t} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $y'' = e^{-2t} \left(\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \right)$. Atunci, ecuația diferențială Euler se transformă în ecuația liniară cu coeficienți constanți

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - 12y = 0 ,$$

care are soluția $y(t)=C_1e^{3t}+C_2e^{-4t}$. Prin urmare soluția ecuației diferențiale Euler este $y(x)=C_1x^3+\frac{C_2}{x^4}$. Din condițiile la limită obținem $C_1=1$, $C_2=0$. Aşadar, extremala căutată este $y(x)=x^3$.

Observația 6.3.3. Să presupunem că $\frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\equiv 0$. Atunci funcția F este de forma

$$F(x,y,y')=P(x,y)+Q(x,y)y'.$$

Ecuația lui Euler devine

$$\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial Q}{\partial y}y'-\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}y'=0,$$

adică

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{6}$$

Dacă această relație este satisfăcută identic, atunci expresia de sub semnul integralei

$$[P(x,y)+Q(x,y)y']\mathrm{d}x=P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$$

va fi o diferențială totală exactă, deci valoarea integralei depinde numai de capetele curbei, nu şi de drumul de integrare. În acest caz problema variațională nu are sens.

Dacă relația (6) nu este satisfăcută identic, atunci ea defineşte o curbă bine determinată, care, în general, nu va trece prin punctele date. În acest caz, problema variațională nu are soluție. În anumite cazuri particulare, relația (6) poate să dea soluția problemei de extrem pentru funcționala corespunzătoare.

Exemplul 6.3.2. Să se determine extremalele funcționalei

$$\mathscr{F}(y)=\int_1^2(3x-y)y\,\mathrm{d}x,$$

care satisfac condițiile la limită $y(1)=1$, $y(2)=8$.

În acest caz $F(x,y,y')=3xy-y^2$, iar ecuația lui Euler devine $\frac{\partial F}{\partial y}=0$, adică $3x-2y=0$. Prin urmare, $y(x)=\frac{3}{2}x$, care, în mod evident, nu satisface condițiile la limită.

Cazuri particulare ale ecuației lui Euler

1) *Funcția F nu depinde de y.*

În acest caz $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ şi ecuația lui Euler devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0,$$

deci

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C \tag{7}$$

este o integrală primă pentru ecuația lui Euler.

Exemplul 6.3.3. Să se determine extremalele funcționalei

$$\mathscr{F}(y) = \int_1^2 y'(1 + x^2 y')\mathrm{d}x,$$

care satisfac condițiile la limită $y(1) = 3$, $y(2) = 5$.

În acest caz $F(x, y, y') = y'(1 + x^2 y')$, deci F nu depinde de y. Conform celor de mai sus, extremalele funcționalei satisfac ecuația (6), adică $1 + 2x^2 y' = C$. Atunci $y' = \frac{C-1}{2x^2}$, de unde, prin integrare, găsim familia de hiperbole $y = \frac{C_1}{x} + C_2$. Constantele C_1 şi C_2 se determină din condițiile la limită. Obținem sistemul $C_1 + C_2 = 3$, $\frac{1}{2}C_1 + C_2 = 5$, care are soluțiile $C_1 = -4$, $C_2 = 7$. Extremala căutată este $y(x) = 7 - \frac{4}{x}$.

2) *Funcția F nu depinde de x.*

În acest caz vom arăta că

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} = C \tag{8}$$

este o integrală primă pentru ecuația lui Euler.

Într-adevăr, deoarece $F = F(y, y')$ şi ținând seama de ecuația lui Euler, obținem succesiv:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' - \frac{\partial F}{\partial y'}y'' - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) =$$

$$= y'\left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right) = 0,$$

de unde rezultă (8).

Exemplul 6.3.4. Să se rezolve problema brachistocronei. Altfel spus, să se determine extremalele funcționalei

$$\mathscr{T}(y) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + y'^2(x)}}{\sqrt{y(x)}}\mathrm{d}x,$$

care satisfac condițiile la limită $y(0) = 0$, $y(a) = b$.

În acest caz $F(x, y, y') = F(y, y') = \dfrac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}}$. Deoarece $\dfrac{\partial F}{\partial y'} = \dfrac{y'}{\sqrt{y}\sqrt{1 + y'^2}}$, din (8) obținem $\dfrac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} - \dfrac{y'^2}{\sqrt{y}\sqrt{1 + y'^2}} = C$, care se mai scrie $\dfrac{1}{\sqrt{y}\sqrt{1 + y'^2}} = C$. Notând $k = \dfrac{1}{C^2}$, rezultă că

$$y = \frac{k}{1 + y'^2}.$$

Punând $y' = \mathrm{ctg}t$, rezultă că $y = k\sin^2 t = \dfrac{k}{2}(1 - \cos 2t)$. Atunci

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}y}{y'} = \frac{k\sin 2t}{\mathrm{ctg}t} = 2k\sin^2 t\mathrm{d}t = k(1 - \cos 2t)\mathrm{d}t.$$

Prin urmare

$$x = \frac{k}{2}(2t - \sin 2t) + k_1.$$

Aşadar, obținem curbele sub formă parametrică

$$\begin{cases} x = \dfrac{k}{2}(2t - \sin 2t) + k_1 \\ y = \dfrac{k}{2}(1 - \cos 2t) \end{cases} \tag{9}$$

constantele k şi k_1 fiind arbitrare şi se determină din condițiile la limită. Ecuațiile (9) reprezintă o familie de cicloide generate prin rostogolirea unui cerc de rază $\dfrac{k}{2}$ pe axa reală.

Punctele de întoarcere vor fi puncte de pe axa reală de abscise $x = k_1 + 2n\pi k$, $n \in \mathbb{Z}$.

Cum, prin ipoteză, curba căutată trece prin origine, va rezulta $k_1 = 0$. Constanta k se determină din condiția $y(a) = b$.

6.4. Funcționale de tipul $\mathscr{F}(y,z) = \int_a^b F(x, y, z, y', z')\mathrm{d}x$

Fie $D \subset \mathbb{R}^5$ o mulțime deschisă , $F : D \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ şi $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$.

De asemenea, fie

$$\mathscr{D} = \{(y,z) \in \mathscr{C}^{(1)}(I;\mathbb{R}^2) \big|\ \big(x, y(x), z(x), y'(x), z'(x)\big) \in D,\ \forall x \in I\},$$

$y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$ numere date şi

$$\mathscr{A} = \{(y,z) \in \mathscr{D}\ \mid y(a) = y_1,\ y(b) = y_2, z(a) = z_1, z(b) = z_2\}.$$

Considerăm funcționala $\mathscr{F} : \mathscr{A} \to \mathbb{R}$,

$$\mathscr{F}(y,z) = \int_a^b F(x, y, z, y', z')\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Această funcțională depinde de F. Mulțimea $\mathscr{A}$ se numeşte *mulțimea funcțiilor admisibile*.

Teorema 6.4.1. *Dacă* $(y,z) \in \mathscr{C}^{(1)}(I;\mathbb{R}^2)$ *realizează extremumul funcționalei (1) pe mulțimea funcțiilor admisibile, atunci funcțiile* $x \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial y'}(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))$,

$x \mapsto \dfrac{\partial F}{\partial z'}(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x))$ *sunt de clasă* $\mathscr{C}^{(1)}$, *iar funcțiile* y *şi* z *verifică sistemul de ecuații diferențiale*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right) \end{cases}. \tag{2}$$

Demonstrație. Fie $(g,h) \in \mathscr{C}^{(1)}(I;\mathbb{R}^2)$ care satisface condițiile la limită $g(a)=0$, $g(b)=0$, $h(a)=0$, $h(b)=0$ şi funcția

$$\varphi_{(g,h)} : \left(-\frac{r}{\|(g,h)\|}, \frac{r}{\|(g,h)\|}\right) \to \mathbb{R}, \quad \varphi_{(g,h)}(t) = \mathscr{F}(y+tg, z+th).$$

Variația întâi a funcționalei (1) este $\delta_{(g,h)}\mathscr{F}(y,z) = \varphi'_{(g,h)}(0)$, deci

$$\delta_{(g,h)}\mathscr{F}(y,z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_a^b F\left(x, y(x)+tg(x), y'(x)+tg'(x), z(x)+th(x), z'(x)+th'(x)\right)\mathrm{d}x \right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(F\left(x, y(x)+tg(x), y'(x)+tg'(x), z(x)+th(x), z'(x)+th'(x)\right)\right)\Bigg|_{t=0} \right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\right)\cdot g(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\left(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\right)\cdot g'(x) \right]\mathrm{d}x +$$

$$+ \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial z}\left(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\right)\cdot h(x) + \frac{\partial F}{\partial z'}\left(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\right)\cdot h'(x) \right]\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Conform teoremei lui Fermat, $\delta_{(g,h)}\mathscr{F}(y,z) = 0$, pentru orice funcții g şi h de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$ pe $[a,b]$, care satisfac $g(a)=0$, $g(b)=0$, $h(a)=0$, $h(b)=0$.

În particular, scriind $\delta_{(g,h)}\mathscr{F}(y,z) = 0$ pentru $(g,0)$ respectiv $(0,h)$ şi ținând seama de (3), obținem:

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\right)\cdot g(x) + \frac{\partial F}{\partial y'}\left(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\right)\cdot g'(x) \right]\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial z}\left(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\right)\cdot h(x) + \frac{\partial F}{\partial z'}\left(x, y(x), y'(x), z(x), z'(x)\right)\cdot h'(x) \right]\mathrm{d}x = 0.$$

Concluzia teoremei rezultă din Corolarul 1. ■

Aşadar, Teorema 6.4.1 dă condiţii necesare de extrem. Sistemul de ecuaţii diferenţiale (2) se numeşte *sistemul Euler-Lagrange* asociat funcţionalei (1). Curbele y şi z care satisfac sistemul (2) se numesc *curbe extremale* sau, simplu, *extremale* ale funcţionalei (1).

Observaţia 6.4.1. 1) Dacă funcţia F nu depinde explicit de y sau z, atunci sistemul (2) admite, în mod evident, integralele prime

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = C \text{ respectiv } \frac{\partial F}{\partial z'} = C'.$$

2) Dacă funcţia F nu depinde explicit de x, atunci sistemul (2) admite integrala primă

$$F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} - z'\frac{\partial F}{\partial z'} = C.$$

Într-adevăr,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'} - z'\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial z}z' + \frac{\partial F}{\partial y'}y'' + \frac{\partial F}{\partial z'}z'' -$$

$$-y''\frac{\partial F}{\partial y'} - y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - z''\frac{\partial F}{\partial z'} - z'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial z'}\right) = 0,$$

deoarece y şi z care satisfac sistemul Euler-Lagrange.

Exemplul 6.4.1. Să se determine extremalele funcţionalei

$$\mathscr{F}(y,z) = \int_0^{\pi} (2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2)\mathrm{d}x,$$

care satisfac condiţiile la limită $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$, $z(0) = 0$, $z(\pi) = 1$.

Deoarece $F(x, y, z, y', z') = 2yz - 2y^2 + y'^2 - z'^2$, sistemul Euler-Lagrange devine:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 2z - 4y - 2y'' = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\partial F}{\partial z'}\right) = 2y - 2z'' = 0 \end{cases}.$$

Din sistemul $y'' + 2y - z = 0$, $z'' + y = 0$, eliminând pe z, obținem ecuația diferențială $y^{IV} + 2y'' + y = 0$, a cărei soluție generală este

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x(C_3 \cos x + C_4 \sin x).$$

Din condițiile $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$, obținem $C_1 = 0$ şi $C_3 = -\dfrac{1}{\pi}$. În consecință

$$y(x) = C_2 \sin x + C_4 x \sin x - \frac{x}{\pi} \cos x.$$

Din prima ecuație a sistemului rezultă că

$$z(x) = C_2 \sin x + C_4(2\cos x + x \sin x) + \frac{1}{\pi}(2\sin x - x\cos x).$$

Folosind condițiile $z(0) = 0$, $z(\pi) = 1$, obținem $C_4 = 0$ şi C_2 arbitrar. În concluzie, curbele extremale căutate sunt:

$$y(x) = C_2 \sin x - \frac{x}{\pi} \cos x,$$

$$z(x) = C_2 \sin x + \frac{1}{\pi}(2\sin x - x\cos x).$$

6.5. Funcționale de tipul $\mathscr{F}(y) = \int_a^b F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})\mathrm{d}x$

Procedând ca în secțiunea 6.3, vom aborda probleme ale calculului variațional, în care funcția de sub semnul integrală depinde nu numai de derivata de ordinul întâi, ci şi de derivatele de ordin superior. Probleme de acest tip apar des în teoria elasticității. Prezentăm, pe scurt, un exemplu. Să se determine forma axei unei grinzi încovoiate, cu anumite condiții la extremități. Această problemă revine la găsirea extremumului energiei potențiale a sistemului. Dar energia potențială a unei grinzi încovoiate depinde de curbură. Prin urmare, în această problemă se caută curbele extremale în cazul în care funcția de sub semnul integrală depinde de derivatele de ordinul întâi şi de ordinul al doilea ale funcției necunoscute.

Fie $I=[a,b]\subset\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{N}^*$ şi fie $\mathscr{C}^{(n)}(I;\mathbb{R})$ spaţiul vectorial real al funcţiilor $y:I\to\mathbb{R}$ de clasă $\mathscr{C}^{(n)}$, înzestrat cu norma

$$\|y\|=\sup_{x\in I}|y(x)|+\sup_{x\in I}|y'(x)|+\ldots+\sup_{x\in I}\left|y^{(n)}(x)\right|.$$

Dacă $F:[a,b]\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ este o funcţie dată, de clasă $\mathscr{C}^{(1)}$, considerăm funcţionala $\mathscr{F}:\mathscr{C}^{(n)}(I;\mathbb{R})\to\mathbb{R}$,

$$\mathscr{F}(y)=\int_a^b F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n)})\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Problema pe care o vom aborda se enunţă în modul următor. Dintre toate curbele $y\in\mathscr{C}^{(n)}(I;\mathbb{R})$, care verifică condiţiile la limită:

$$y(a)=c_1,\ y'(a)=c_2,\ldots,\ y^{(n-1)}(a)=c_n,$$

$$y(b)=d_1,\ y'(b)=d_2,\ldots,\ y^{(n-1)}(b)=d_n, \tag{2}$$

să se determine acea curbă de-a lungul căreia funcţionala (1) realizează un extremum.

Se constată uşor că, dacă se cunoaşte o funcţie $y_0\in\mathscr{C}^{(n)}(I;\mathbb{R})$ care verifică condiţiile la limită (2), atunci orice altă funcţie $y\in\mathscr{C}^{(n)}(I;\mathbb{R})$ care verifică, de asemenea, condiţiile la limită (2), este de forma $y=y_0+h$, unde $h\in\mathscr{C}^{(n)}(I;\mathbb{R})$ satisface condiţiile la limită:

$$h(a)=0,\ h'(a)=0,\ldots,\ h^{(n-1)}(a)=0,$$

$$h(b)=0,\ h'(b)=0,\ldots,\ h^{(n-1)}(b)=0. \tag{3}$$

Prin urmare, dacă $y_0\in\mathscr{C}^{(n)}(I;\mathbb{R})$ realizează un extrem al funcţionalei (1) pe mulţimea funcţiilor din $\mathscr{C}^{(n)}(I;\mathbb{R})$ care satisfac condiţiile la limită (2), atunci, în mod necesar

$$\delta_h\mathscr{F}(y_0)=0,$$

pentru orice $h\in\mathscr{C}^{(n)}(I;\mathbb{R})$ care satisface condiţiile la limită (3).

Teorema 6.5.1. *Fie $F:[a,b]\times\mathbb{R}^{n+1}\to\mathbb{R}$ o funcţie de clasă $\mathscr{C}^{(n+1)}$. Dacă funcţia $y\in\mathscr{C}^{(2n)}(I;\mathbb{R})$ realizează un extrem al funcţionalei (1) pe mulţimea funcţiilor din $\mathscr{C}^{(n)}(I;\mathbb{R})$, care satisfac condiţiile la limită (2), atunci funcţia y verifică ecuaţia diferenţială*

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y''}\right)+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\right). \tag{4}$$

Demonstrație. Vom arăta că funcționala (1) admite variația întâi în orice punct $y \in \mathscr{C}^{(n)}(I;\mathbb{R})$, după direcția oricărui $h \in \mathscr{C}^{(n)}(I;\mathbb{R})$. Într-adevăr

$$\delta_h \mathscr{F}(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_a^b F\left(x, y+th, y'+th', \ldots, y^{(n)}+th^{(n)}\right)\mathrm{d}x \right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\cdot h + \frac{\partial F}{\partial y'}\cdot h' + \frac{\partial F}{\partial y''}\cdot h'' + \ldots + \frac{\partial F}{\partial y^{(n)}}\cdot h^{(n)} \right]\mathrm{d}x .$$

Să presupunem acum că funcția h satisface condițiile la limită (3). Integrând prin părți, pentru orice k, $1 \le k \le n$, obținem

$$\int_a^b \frac{\partial F}{\partial y^{(k)}}\cdot h^{(k)}\mathrm{d}x = -\int_a^b \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right)\cdot h^{(k-1)}\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right)\cdot h^{(k-2)}\mathrm{d}x = \ldots = (-1)^k \int_a^b \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right)\cdot h\ \mathrm{d}x .$$

În consecință, avem

$$\delta_h \mathscr{F}(y) = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} \right) + \ldots + (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\frac{\partial F}{\partial y^{(n)}} \right) \right]\cdot h\ \mathrm{d}x .$$

Deoarece $\delta_h \mathscr{F}(y) = 0$ pentru orice funcție h de clasă $\mathscr{C}^{(n)}$ pe $[a,b]$, care satisface $h(a)=0$, $h(b)=0$, din lema fundamentală a calculului variațional rezultă că funcția y satisface ecuația diferențială (4). ■

Prin urmare Teorema lui 6.5.1 dă o condiție necesară de extrem. Ecuația diferențială (4) se numeşte *ecuația Euler-Poisson* asociată funcționalei (1). Soluțiile acestei ecuații se numesc *curbe extremale* sau, simplu, *extremale* ale funcționalei (1).

Exemplul 6.5.1. Să se determine extremalele funcționalei

$$\mathscr{F}(y) = \int_0^1 (2yy' - 2y^2 - y'^2 + y''^2)\mathrm{d}x ,$$

care satisfac condițiile la limită $y(0)=1$, $y'(0)=0$, $y(1)=\mathrm{ch}1$, $y'(0)=\mathrm{sh}1$.

În acest caz $F(x, y, y', y'') = 2yy' - 2y^2 - y'^2 + y''^2$, $\dfrac{\partial F}{\partial y} = 2y' - 4y$,

$\dfrac{\partial F}{\partial y'} = 2y - 2y'$, $\dfrac{\partial F}{\partial y''} = 2y''$. În consecință, ecuația Euler-Poisson asociată funcționalei este $2y' - 4y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2y - 2y') + \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(2y'') = 0$ sau $y^{IV} + y'' - 2y = 0$. Ecuația caracteristică a acestei ecuații diferențiale este $r^4 + r^2 - 2 = 0$ și are rădăcinile $r_1 = 1$, $r_2 = -1$, $r_3 = \mathrm{i}\sqrt{2}$, $r_4 = -\mathrm{i}\sqrt{2}$.

Atunci soluția generală a ecuației Euler-Poisson va fi

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos\sqrt{2}x + C_4 \sin\sqrt{2}x.$$

Ținând seama de condițiile la limită, este util să scriem această soluție generală folosind funcțiile hiperbolice. Deoarece $e^x = \mathrm{ch}x + \mathrm{sh}x$ și $e^{-x} = \mathrm{ch}x - \mathrm{sh}x$, atunci, notând $k_1 = C_1 + C_2$, $k_2 = C_1 - C_2$, rezultă că soluția generală a ecuației Euler-Poisson se poate scrie sub forma

$$y(x) = k_1 \mathrm{ch}x + k_2 \mathrm{sh}x + C_3 \cos\sqrt{2}x + C_4 \sin\sqrt{2}x.$$

Folosind condițiile la limită, ajungem la sistemul algebric liniar $k_1 + C_3 = 0$, $k_2 + \sqrt{2}C_4 = 0$, $k_1 \mathrm{ch}1 + k_2 \mathrm{sh}1 + C_3 \cos\sqrt{2} + C_4 \sin\sqrt{2} = \mathrm{ch}1$, $k_1 \mathrm{sh}1 + k_2 \mathrm{ch}1 - \sqrt{2}C_3 \sin\sqrt{2} + \sqrt{2}C_4 \cos\sqrt{2} = \mathrm{sh}1$. Rezolvând acest sistem, obținem $k_1 = 1$, $k_2 = 0$, $C_3 = 0$, $C_4 = 0$. Prin urmare, extremala căutată este $y(x) = \mathrm{ch}x$.

6.6. Funcționale de tipul $\mathscr{F}(u) = \iint_D F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit, a cărui frontieră este curba închisă, netedă pe porțiuni C, $U \subset \mathbb{R}^5$ o mulțime deschisă și $F : U \to \mathbb{R}$ o funcție de clasă $\mathscr{C}^1$. Fie

$$\mathscr{D} = \{u \in \mathscr{C}^1(\bar{D};\mathbb{R}) \;\Big|\; \left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) \in U, \forall (x,y) \in \bar{D}\}.$$

Considerăm funcționala $\mathscr{F} : \mathscr{D} \to \mathbb{R}$,

$$\mathscr{F}(u) = \int_a^b F\left(x, y, u(x,y), \frac{\partial u}{\partial x}(x,y), \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{1}$$

Se poate demonstra că mulțimea $\mathscr{D}$ este o submulțime deschisă a spațiului normat $\mathscr{C}^1(\bar{D};\mathbb{R})$. Dacă g este o funcție dată pe curba C, fie

$$\mathscr{A} = \{u \in \mathscr{D};\ u\big|_C = g\}.$$

Este clar că, dacă funcția $u_0 \in \mathscr{A}$ este cunoscută, atunci orice altă funcție $u \in \mathscr{A}$ este de forma $u = u_0 + h$, unde $h\big|_C = 0$.

Ne punem problema determinării punctelor de extrem ale funcționalei (1) pe mulțimea $\mathscr{A}$. Pentru rezolvarea acestei probleme sunt utile următoarele rezultate.

Lema 6.6.1. *Fie $f : \overline{D} \to \mathbb{R}$ o funcție continuă cu proprietatea că pentru orice funcție h de clasă $\mathscr{C}^1$ pe o mulțime deschisă ce conține $\overline{D}$, cu $h\big|_C = 0$, satisface condiția*

$$\iint_D f(x,y)h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0. \tag{2}$$

Atunci $f(x,y) = 0$, pentru orice $(x,y) \in \overline{D}$.

Demonstrație. Funcția f fiind continuă, este suficient să arătăm că $f(x,y) = 0$, pentru orice $x \in D$. Presupunem, prin absurd, că f nu este identic nulă pe D, deci există $(a,b) \in D$ astfel încât $f(a,b) \neq 0$. Fără micşorarea generalității, presupunem că $f(a,b) > 0$.

Funcția f fiind continuă în punctul (a,b), pentru orice $\varepsilon > 0$ există $r > 0$ suficient de mic, astfel încât $V = B\big((a,b);r\big) \subset D$ şi pentru orice $(x,y) \in V$, avem $\big|f(x,y) - f(a,b)\big| < \varepsilon$. Altfel spus, pentru orice $(x,y) \in V$ au loc inegalitățile $f(a,b) - \varepsilon < f(x,y) < f(a,b) + \varepsilon$. În particular, pentru $\varepsilon = \frac{1}{2} f(a,b)$ rezultă că există o bilă corespunzătoare $V = B\big((a,b);r\big)$ astfel încât pentru orice $x \in V$ avem $f(x,y) > \frac{1}{2} f(a,b)$. Fie funcția

$$h(x,y) = \begin{cases} \big((x-a)^2 + (z-b)^2 - r^2\big)^2, & \text{dacă } x \in V \\ 0, & \text{dacă } x \notin V \end{cases}.$$

Se verifică uşor că funcția h satisface condițiile din enunțul lemei. În plus, folosind teorema de medie pentru integrala dublă, rezultă că

$$\iint_D f(x,y)h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_V f(x,y)h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y >$$

$$> \frac{1}{2} f(a,b) \iint_V h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2} f(a,b) h(\overline{x},\overline{y}) \cdot \pi r^2 > 0,$$

unde $(\overline{x},\overline{y})\in V$, ceea ce contrazice (2). ■

Corolarul 6.6.1. *Dacă* $P:\overline{D}\to\mathbb{R}$ *este o funcţie continuă, iar* Q *şi* R *sunt două funcţii de clasă* $\mathscr{C}^1$ *pe o mulţime deschisă care conţine* $\overline{D}$*, care satisfac*

$$\iint\limits_D [P(x,y)h(x,y)+Q(x,y)\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)+R(x,y)\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0 \tag{3}$$

pentru orice funcţie h *de clasă* $\mathscr{C}^1$ *pe o mulţime deschisă ce conţine* $\overline{D}$*, cu* $h\big|_C=0$*, atunci*

$$P(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial R}{\partial y}(x,y),\ \forall(x,y)\in\overline{D}.$$

Demonstraţie. Deoarece

$$Q\frac{\partial h}{\partial x}+R\frac{\partial h}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(Qh)+\frac{\partial}{\partial y}(Rh)-\frac{\partial Q}{\partial x}h-\frac{\partial R}{\partial y}h,$$

rezultă că

$$\iint\limits_D [Q\frac{\partial h}{\partial x}+R\frac{\partial h}{\partial y}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D [\frac{\partial}{\partial x}(Qh)+\frac{\partial}{\partial y}(Rh)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D [\frac{\partial Q}{\partial x}h+\frac{\partial R}{\partial y}h]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Conform formulei Green-Riemann şi ţinând seama că $h\big|_C=0$, rezultă

$$\iint\limits_D [\frac{\partial}{\partial x}(Qh)+\frac{\partial}{\partial y}(Rh)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\limits_C (-Rh)\mathrm{d}x+(Qh)\mathrm{d}y=0.$$

Aşadar

$$\iint\limits_D [Q\frac{\partial h}{\partial x}+R\frac{\partial h}{\partial y}]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_D [\frac{\partial Q}{\partial x}h+\frac{\partial R}{\partial y}h]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Înlocuind în (3), obţinem

$$\iint\limits_D [P(x,y)-\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)-\frac{\partial R}{\partial y}(x,y)]h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

pentru funcţie h de clasă $\mathscr{C}^1$, care satisface $h\big|_C=0$. Corolarul rezultă din Lema 6.6.1. ■

Teorema 6.6.1. *Dacă funcţia* $u\in\mathscr{A}$ *realizează un extrem al funcţionalei (1) pe mulţimea funcţiilor admisibile, atunci funcţia* u *verifică ecuaţia cu derivate parţiale*

$$\frac{\partial F}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F}{\partial u_x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u_y}\right)=0, \tag{4}$$

unde $u_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}$, $u_y = \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Demonstrație. Fie h o funcție de clasă $\mathscr{C}^1$, care satisface $h\big|_C = 0$ și funcția $\varphi_h : \left(-\dfrac{r}{\|h\|}, \dfrac{r}{\|h\|}\right) \to \mathbb{R}$, $\varphi_h(t) = \mathscr{F}(u+th)$. Variația întâi a funcționalei (1) este $\delta_h \mathscr{F}(u) = \varphi_h'(0)$, deci

$$\delta_h \mathscr{F}(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint_D F\left(x, y, u+th, \frac{\partial u}{\partial x} + t\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} + t\frac{\partial h}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)\Bigg|_{t=0} =$$

$$= \iint_D \frac{d}{dt}\left[F\left(x, y, u+th, \frac{\partial u}{\partial x} + t\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} + t\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right]\Bigg|_{t=0} \mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial u} h + \frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{\partial h}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Deoarece $\delta_h \mathscr{F}(u) = 0$ pentru orice funcție h de clasă $\mathscr{C}^1$ care satisface $h\big|_C = 0$, obținem că

$$\iint_D \left[\frac{\partial F}{\partial u} h + \frac{\partial F}{\partial u_x}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u_y}\frac{\partial h}{\partial y}\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0, \ \forall h \in \mathscr{C}^1, \ h\big|_C = 0.$$

Teorema rezultă din Corolarul 6.6.1. ■

Şi în acest caz, Teorema 6.6.1 dă o condiție necesară de extrem. Ecuația cu derivate parțiale (4) se numeşte *ecuația Euler-Ostrogradski* asociată funcționalei (1). Soluțiile acestei ecuații se numesc *suprafețe extremale* sau, simplu, *extremale* ale funcționalei (1).

Exemplul 6.6.1. Fie $D \subset \mathbb{R}^2$ un domeniu mărginit, a cărui frontieră este curba închisă, netedă pe porțiuni C şi $f : D \to \mathbb{R}$ o funcție continuă dată. Să se determine extremalele funcționalei

$$\mathscr{F}(u) = \iint_D (u_x^2 + u_y^2 + 2fu)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{5}$$

care satisfac $u\big|_C = g$, g fiind o funcție dată pe curba C.

Deoarece $F(x, y, u, u_x, u_y) = u_x^2 + u_y^2 + 2fu$, avem

$$\frac{\partial F}{\partial u} = 2f \;,\; \frac{\partial F}{\partial u_x} = 2u_x \,,\; \frac{\partial F}{\partial u_y} = 2u_y \,,$$

deci ecuaţia Euler-Ostrogradski este

$$2f - \frac{\partial}{\partial x}(2u_x) - \frac{\partial}{\partial y}(2u_y) = 0 \,,$$

adică

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f \,.$$

Prin urmare, problema determinării extremalelor funcţionalei (5) conduce la rezolvarea problemei Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u\big|_C = g \end{cases}.$$

6.7. Extreme condiţionate ale funcţionalelor

Fie X un spaţiu normat şi $F, G : X \to \mathbb{R}$ două funcţionale care admit variaţia întâi în orice punct din X. Se numeşte *extrem al lui F condiţionat de G*, orice punct de extrem local al lui F care satisface legătura $G(y) = C$, $y \in X$, C fiind o constantă dată.

Teorema 6.7.1. *Fie y_0 un punct de extrem al lui F condiţionat de G, care nu este punct critic pentru G. Atunci, există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât y_0 să fie punct critic pentru funcţionala $F + \lambda G$.*

Demonstraţie. Deoarece y_0 nu este punct critic pentru G, există $l \in X$ astfel încât $\delta_l G(y_0) \neq 0$. Fie $h \in X$ arbitrar. Considerăm funcţiile $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ date de

$$f(t,s) = F(y_0 + th + sl) \,,\; g(t,s) = G(y_0 + th + sl) - C \,.$$

Dacă y_0 este punct de extrem al lui F condiţionat de G, rezultă că $(0,0)$ este punct de extrem local al lui f, cu legătura $g(t,s) = 0$. În plus,

$$\frac{\partial g}{\partial s}(0,0) = \lim_{s\to 0}\frac{g(0,s)-g(0,0)}{s} = \lim_{s\to 0}\frac{G(y_0+sl)-G(y_0)}{s} = \delta_l G(y_0) \neq 0 .$$

Conform metodei multiplicatorilor lui Lagrange pentru extreme cu legături, există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât $(0,0)$ este punct critic al funcției $\varphi = f + \lambda g$. Aşadar

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0,0) = 0 ,\ \frac{\partial \varphi}{\partial s}(0,0) = 0 .$$

În consecință,

$$\delta_h(F+\lambda G)(y_0) = \lim_{t\to 0}\frac{F(y_0+th)-F(y_0)}{t} + \lambda \lim_{t\to 0}\frac{G(y_0+th)-G(y_0)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} + \lambda \lim_{t\to 0}\frac{g(t,0)-g(0,0)}{t} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0,0) = 0 .$$

Prin urmare, y_0 este punct critic pentru funcționala $F + \lambda G$. ■

Exemplul 6.7.1. Să se găsească curba plană situată în semiplanul superior, care trece prin punctele $A(-1,0)$ şi $B(1,0)$, de lungime $l > 2$, astfel încât aria cuprinsă între această curbă şi segmentul $[AB]$ să fie maximă.

Dacă $y = y(x)$, $x \in [-1,1]$, este ecuația curbei căutate, atunci aria determinată de această curbă şi axa Ox , va fi

$$F(y) = \int_{-1}^{1} y dx . \tag{1}$$

Condiția ca lungimea arcului de curbă să fie *l*, este

$$G(y) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1+y'^2}\, dx = l . \tag{2}$$

Fie $\mathscr{C}_0^1([-1,1];\mathbb{R})$ spațiul Banach al funcțiilor $y:[-1,1]\to\mathbb{R}$, de clasă $\mathscr{C}^1$, care satisfac condițiile $y(-1)=0$, $y(1)=0$. Aşadar, $F,G:\mathscr{C}_0^1([-1,1];\mathbb{R})\to\mathbb{R}$, sunt date de (1) respectiv (2).

Problema revine la a găsi funcția $y \in \mathscr{C}_0^1([-1,1];\mathbb{R})$, maxim local al funcționalei *F*, care satisface condiția $G(y) = l$. Conform teoremei 6.7, există $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel încât *y* este punct critic al funcționalei $H = F + \lambda G$,

$$H(y) = \int_{-1}^{1} \left(y + \lambda\sqrt{1+y'^2} \right) dx .$$

Ecuația lui Euler corespunzătoare funcționalei *H*, este:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=1,$$

deci

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=x+C_1 .$$

Rezolvînd în raport cu y', găsim

$$y'=\pm\frac{x+C_1}{\sqrt{\lambda^2-(x+C_1)^2}} .$$

Integrând, obținem

$$y+C_2=\mp\sqrt{\lambda^2-(x+C_1)^2}$$

sau, prin ridicare la pătrat,

$$(x+C_1)^2+(y+C_2)^2=\lambda^2 ,\ C_1,C_2=const. \tag{3}$$

Prin urmare, curbele căutate sunt cercuri de rază λ şi cu centrul în punctul $(-C_1,-C_2)$. Punând condițiile ca aceste cercuri să treacă prin puntele *A* şi *B* şi ca lungimea curbei să fie *l*, se ajunge la

$$\begin{cases}(-1+C_1)^2+C_2^2=\lambda^2\\ (1+C_1)^2+C_2^2=\lambda^2\end{cases},$$

deci $C_1=0$, $C_2=\pm\sqrt{\lambda^2-1}$. Ecuația (3) devine

$$x^2+(y\pm\sqrt{\lambda^2-1})^2=\lambda^2 ,$$

deci

$$y(x)=\pm\sqrt{\lambda^2-x^2}\mp\sqrt{\lambda^2-1}$$

şi

$$y'(x)=\mp\frac{x}{\sqrt{\lambda^2-x^2}} .$$

Condiția (2) conduce la

$$l=\int_{-1}^{1}\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-x^2}}dx=2\lambda\arcsin\frac{1}{\lambda}$$

sau

$$\frac{1}{\lambda} = \sin\frac{l}{2\lambda}. \tag{4}$$

Notând $t = \frac{l}{2}$, se constată că această ecuație devine

$$\sin t = \frac{2}{l}t.$$

Panta tangentei în $t = 0$ la graficul funcției $y = \sin t$ este 1, în timp ce dreapta de ecuație $y = \frac{2}{l}t$ are panta $m = \frac{2}{l} < 1$, deci graficele celor două funcții au cel puțin un punct de intersecție diferit de origine. Prin urmare, ecuația (4), transcendentă în λ, are o soluție $\lambda = \lambda_0$ şi $C_2 = \sqrt{\lambda_0^2 - 1}$.

BIBLIOGRAFIE

[1] BARBU, V., *Ecuații diferențiale*, Editura Junimea, Iaşi, 1985.

[2] BRÂNZĂNESCU, V., STĂNĂŞILĂ, O., *Matematici speciale. Teorie. Exemple. Aplicații*, Editura ALL, Bucureşti, 1994.

[3] BURGOV, I.S., NIKOLSKI, S.M., *Ecuații diferențiale. Integrale improprii. Serii. Funcții complexe.* Editura Nauka, Moscova, 1985 (în lb. rusă).

[4] IFRIM, M., *Analiza dinamică a structurilor şi inginerie seismică*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1973.

[5] LAVRENTIEV, M.A., LIUSTERNIK, L.A., *Curs de calcul variațional.* Editura Tehnică, Bucureşti, 1955.

[6] PĂLTINEANU, G., MATEI, P., *Matematici speciale*, Editura Matrix Rom, Bucureşti, 2004.

[7] PĂLTINEANU, G., *Analiză matematică. Calcul diferențial.* Editura AGIR, Bucureşti, 2002.

[8] PĂLTINEANU, G., *Analiză matematică. Calcul integral.* Editura AGIR, Bucureşti, 2004.

[9] PĂLTINEANU, G., MATEI, P., TRANDAFIR, R., *Bazele analizei numerice*, Editura Printech, Bucureşti, 2001.

[10] PETROVSCHI, I. G., *Prelegeri asupra teoriei ecuațiilor diferențiale ordinare*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1952.

[11] PONTRIAGHIN, L.S., *Ecuații diferențiale ordinare*, Editura Nauka, Moscova, 1974 (în lb. rusă).

[12] REDHEFFER, R., *Differential equations, Theory and applications*, Jones and Bartlett Publishers, Boston, 1991.

[13] KRASNOV, M., KISELEV, A., MAKARENKO, G., SHIKIN, E., *Mathematical Analysis for Engineers, vol. 2*, Mir Publishers, Moscow, 1990.

[14] STEPANOV, V.V., *Curs de ecuații diferențiale*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1955.

[15] SOARE, M., TEODORESCU, P.P., TOMA, I., *Ecuații diferențiale cu aplicații în mecanica construcțiilor*, Editura Tehnică, Bucureşti, 1999.

[16] ŞABAC, I., *Matematici speciale*, Editura Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1981.